# 贝叶斯滤波和平滑问题的适定性

黄政宇
北京大学北京国际数学研究中心
北京大学国际机器学习研究中心

# 数据同化

- 随机动力系统

状态　　演化模型

演化方程:　$x_{n+1} = \mathcal{F}(x_n) + \omega_{n+1}$

观测方程:　$y_{n+1} = \mathcal{H}(x_{n+1}) + \eta_{n+1}$

噪音

数据　　观测模型

隐马尔科夫模型

- 初值　：　$x_0 \sim \rho_0(x) = \mathcal{N}(x; m_0, C_0)$
- 模型噪音：　$\omega_j \sim \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\omega)$
- 观测噪音：　$\eta_j \sim \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\eta)$
- 独立性假设：　$x_0 \perp \omega_j \qquad x_0 \perp \eta_j \qquad \omega_j \perp \eta_k$

# 平滑问题

- 平滑问题（给定$N$线下处理）

参数: $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_N\}$

观测: $Y = \{y_0, y_1, \cdots, y_N\}$

反问题: $Y = \mathcal{G}(X) + \eta \qquad \eta \sim \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\eta \otimes I)$

$$\mathcal{G}(X) := [\mathcal{H}(x_1); \mathcal{H}(x_2) \cdots \mathcal{H}(x_N)]$$

后验分布: $\rho(X|Y)$

# 平滑问题

➢ 平滑问题（给定 $N$ 线下处理）

$$
\begin{aligned}
\text{先验分布：}\ \rho_{\text{prior}}(X) &= \rho(x_N, x_{N-1}, \cdots, x_0) \\
&= \rho(x_N | x_{N-1})\, \rho(x_{N-1}, \cdots, x_0) \\
&= \rho(x_0) \textstyle\prod_{n=0}^{N-1} \rho(x_{n+1} | x_n) \\
&\propto e^{-R(X)}
\end{aligned}
$$

$$
R(X) = \frac{1}{2} \parallel C_0^{-\frac{1}{2}} (x_0 - m_0) \parallel^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \parallel \Sigma_\omega^{-\frac{1}{2}} (x_{n+1} - \mathcal{F}(x_n)) \parallel^2
$$

# 平滑问题

- 平滑问题（给定$N$线下处理）

似然函数: $\rho(Y|X) = \rho(y_N, y_{N-1}, \cdots, y_1 \mid x_N, x_{N-1}, \cdots, x_0)$

$$= \prod_{n=1}^{N} \rho\left(y_j \mid x_N, x_{N-1}, \cdots, x_0\right)$$

$$\propto e^{-\Phi(X,Y)}$$

$$\Phi(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \| \Sigma_\eta^{-\frac{1}{2}} (y_{n+1} - \mathcal{H}(x_{n+1})) \|^2$$

求后验分布: $\rho_{\mathrm{post}}(X;Y) = \rho(X|Y) \propto e^{-\Phi_R(X,Y)}$

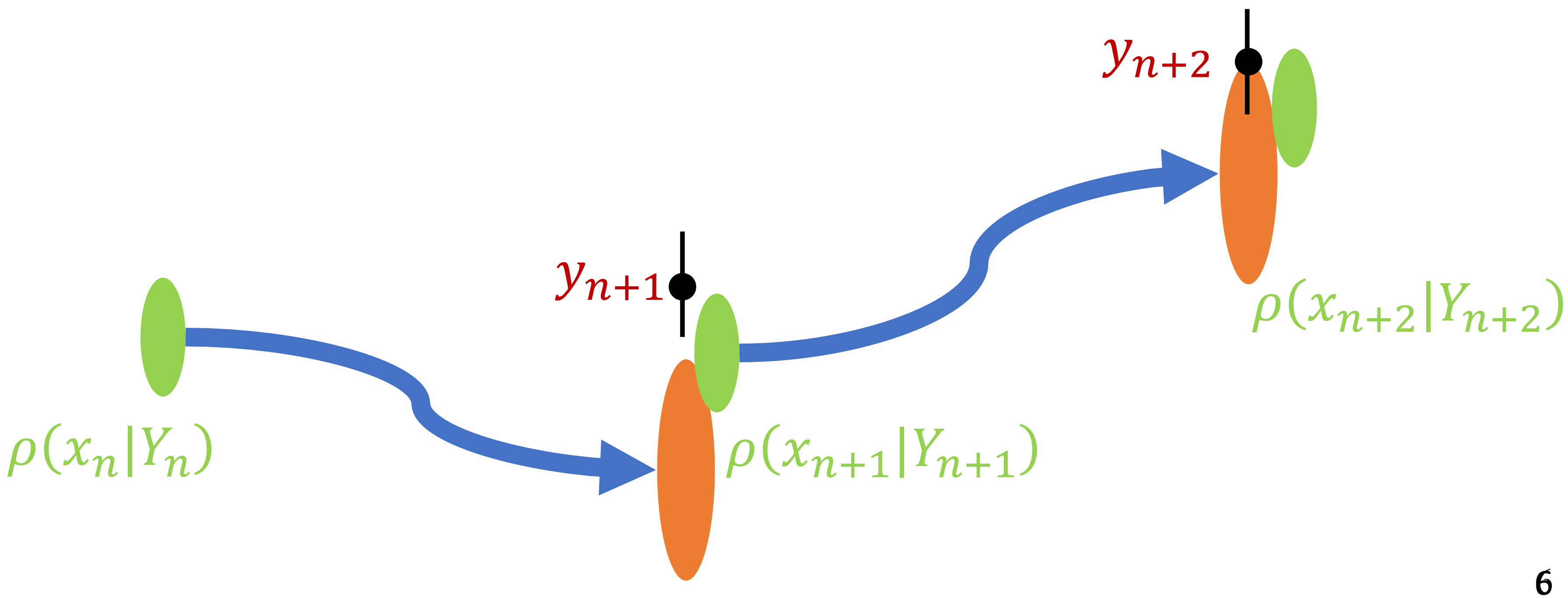
$$\Phi_R(X,Y) = \Phi(X,Y) + R(X)$$

# 滤波问题

➢ 滤波问题（线上处理）

时刻$n+1$的观测集： $Y_{n+1}=\{y_0,y_1,\cdots,y_{n+1}\}$

时刻$n+1$的滤波分布： $\rho(x_{n+1}|Y_{n+1})$



# 滤波问题

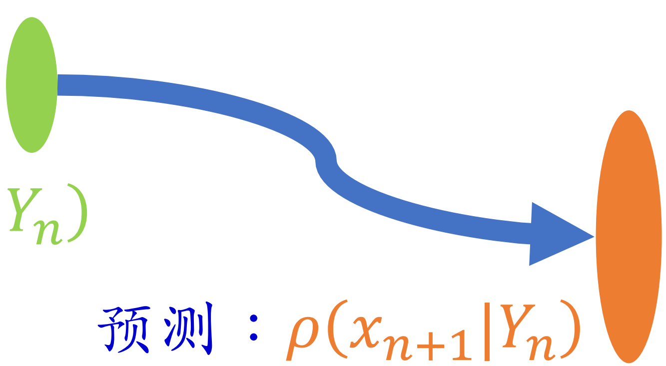
- 滤波问题（线上处理）

预测:

$$\rho(x_{n+1}|Y_n) = \int \rho(x_{n+1}|x_n, Y_n)\rho(x_n|Y_n)dx_n$$

$$= \int \rho(x_{n+1}|x_n)\rho_n(x_n|Y_n)dx_n$$

$$\propto \int \exp(\frac{1}{2} \| \Sigma_\omega^{-\frac{1}{2}} (x_{n+1} - \mathcal{F}(x_n)) \|^2) \rho_n(x_n|Y_n)dx_n$$



$\rho(x_n|Y_n)$

预测：$\rho(x_{n+1}|Y_n)$

# 滤波问题

➢ 滤波问题（线上处理）

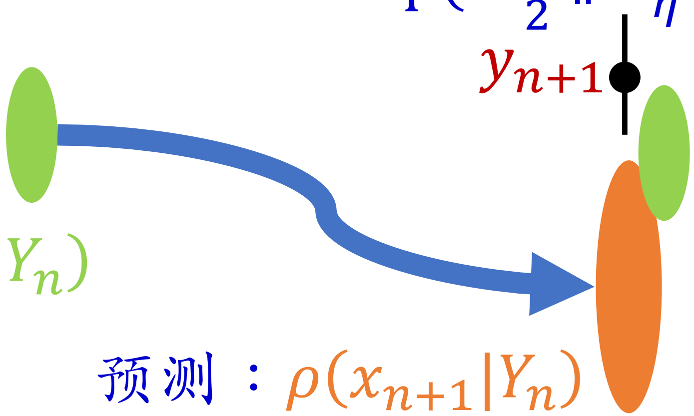
分析:

$$\rho(x_{n+1}|Y_{n+1}) = \rho(x_{n+1}|Y_n, y_{n+1})$$

$$= \frac{\rho(y_{n+1}|Y_n, x_{n+1})\rho(x_{n+1}|Y_n)}{\rho(y_{n+1}|Y_n)}$$

$$= \frac{\rho(y_{n+1}|x_{n+1})\rho(x_{n+1}|Y_n)}{\rho(y_{n+1}|Y_n)}$$

$$\propto \exp(-\frac{1}{2} \parallel \Sigma_\eta^{-\frac{1}{2}} (y_{n+1} - \mathcal{F}(x_{n+1})) \parallel^2)\, \rho(x_{n+1}|Y_n)$$




分析：$\rho(x_{n+1}|Y_{n+1})$

$\rho(x_n|Y_n)$

预测：$\rho(x_{n+1}|Y_n)$

# 贝叶斯平滑和滤波

贝叶斯平滑: $\rho_{\text{post}}(X;Y_N) = \rho(X|Y_N)$

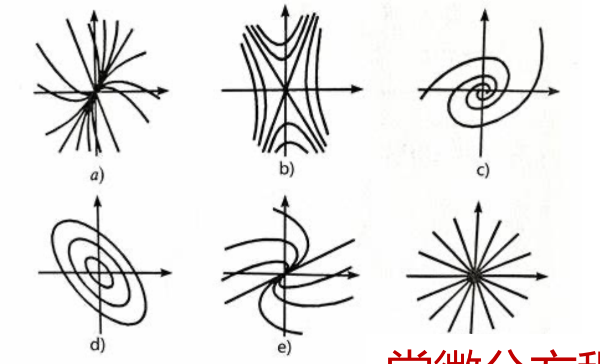
贝叶斯滤波: $\rho(x_n|Y_n)$

$$\rho(x_N|Y_N) = \int \rho(x_N, x_{N-1}, \cdots, x_0|Y_N) dx_0 dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

$$\rho(x_n|Y_n) \neq \int \rho(x_N, x_{N-1}, \cdots, x_0|Y_N) dx_0 \cdots dx_{n-1}\, dx_{n+1} \cdots dx_N$$

# 适定性

- 物理现象中的数学模型
  - 解的存在性
  - 解的唯一性
  - 解连续地取决于初边值条件




常微分方程

- 贝叶斯滤波和平滑问题
  - 分布的存在性
  - 分布的唯一性
  - 分布连续地取决于$Y, \mathcal{H}, \mathcal{F}, \rho_\eta, \rho_\omega, \rho_{\text{prior}}$

# 适定性

## 适定性定理

对于贝叶斯反问题

$$y = \mathcal{G}(\theta) + \eta \qquad \eta \sim \rho_\eta \qquad \theta \sim \rho_{\text{prior}}$$

定义

$$L(\theta) := \rho_\eta(y - \mathcal{G}(\theta)) \qquad L_\delta(\theta) := \rho_\eta(y - \mathcal{G}_\delta(\theta))$$

假设存在$K_1, K_2 > 0, \delta^+ > 0$, 对任意$\delta \in (0, \delta^+)$

i) $\left|\sqrt{L(\theta)} - \sqrt{L_\delta(\theta)}\right| \le \varphi(\theta)\delta,\ \ \mathbb{E}_{\theta\sim\rho_{\text{prior}}}[\varphi(\theta)^2] \le K_1^2$

ii) $\sup\limits_\theta \left(\sqrt{L(\theta)} + \sqrt{L_\delta(\theta)}\right) \le K_2$

那么存在$\Delta > 0, c > 0$，后验分布满足

$$\mathcal{D}_H\left(\rho_{\text{post}}(\theta;\mathcal{G}_\delta)\,,\rho_{\text{post}}(\theta;\mathcal{G})\right) < c\delta \quad \forall \delta \in (0, \Delta)$$

# 适定性

## 贝叶斯平滑问题对数据的适定性定理

对于贝叶斯平滑问题，$Y=Y_N$，假设

i) $\|Y\|_2, \|Y'\|_2 \leq R < \infty$

ii) $\varphi(X) := \sqrt{\sum_{n=1}^{N}\|\mathcal{H}(x_n)\|_2^2}$， $\mathbb{E}_{X\sim\rho_{\text{prior}}(X)}[\varphi(X)^2] < \infty$

那么存在 $c>0$，后验分布满足

$$\mathcal{D}_H\left(\rho_{\text{post}}(X;Y),\rho_{\text{post}}(X;Y')\right) < c\|Y-Y'\|_2$$

# 适定性

## 贝叶斯滤波问题对数据的适定性定理

对于贝叶斯滤波问题，给定$N$，假设

i) $\|Y_N\|_2, \|Y_N'\|_2 \leq R < \infty$

ii) $\varphi(X) := \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \|\mathcal{H}(x_n)\|_2^2}$，$\mathbb{E}_{X\sim\rho_{\mathrm{prior}}(X)}[\varphi(X)^2] < \infty$

那么存在$c > 0$，滤波分布满足

$$\mathcal{D}_{TV}\left(\rho_N(x_N; Y_N), \rho_N(x_N; Y'_N)\right) < c\|Y_N - Y_N'\|_2$$

- 练习

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{D}_{\mathrm{TV}}(\rho_A, \rho_B) \leq \mathcal{D}_{\mathrm{H}}(\rho_A, \rho_B) \leq \sqrt{\mathcal{D}_{\mathrm{TV}}(\rho_A, \rho_B)}$

2. 定义 $|f|_\infty = \sup_x |f(x)|$

$$\mathcal{D}_{\mathrm{TV}}(\rho_A, \rho_B) \coloneqq \frac{1}{2} \sup_{|f|_\infty \leq 1} |\mathbb{E}_{\rho_A} f(x) - \mathbb{E}_{\rho_B} f(x)|$$