

求解非对称鞍点问题的一种 Uzawa 型算法

姜婷, 高立

北京大学
数学科学学院

2013 年 12 月 21 日

提纲

- 1 鞍点问题
- 2 对称鞍点问题
- 3 非对称鞍点问题
- 4 求解非对称鞍点问题的新的算法
- 5 数值试验

鞍点问题

鞍点问题的一般形式:

$$\begin{pmatrix} A & B_1^T \\ B_2 & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix},$$

其中 $A \in R^{n \times n}$, $B_1, B_2 \in R^{m \times n}$, $C \in R^{m \times m}$, 并且满足 $n \geq m$.

鞍点问题产生于:

- 流体力学中的 Stokes 方程;
- 电磁学中的 Maxwell 方程;
- 图像处理;
- 二次规划问题.

解鞍点问题的主要方法:

- Schur 分解法;
- Krylov 子空间法;
- 零空间方法;
- Uzawa 型方法.

对称鞍点问题

对称鞍点问题的一般形式如下：

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix},$$

其中 $A \in R^{n \times n}$ 是对称正定矩阵，

$B \in R^{m \times n}$ 是行满秩矩阵，

$C \in R^{m \times m}$ 是对称半正定矩阵。

Uzawa 型方法的主要类型:

- 经典 Uzawa 方法;
- 非精确 Uzawa 方法;
- 预条件 Uzawa 方法;
- BB-Uzawa 方法.

经典 Uzawa 算法

我们可以将鞍点问题写成如下的形式:

$$\begin{cases} Ax + B^T y = f, \\ Bx - Cy = h, \end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases} Ax = f - B^T y, \\ Sy = b, \end{cases}$$

其中 $S = BA^{-1}B^T + C$, $b = BA^{-1}f - h$.

经典 Uzawa 算法

因为 S 是对称正定矩阵, 所以

$$Sy = b \Leftrightarrow \min Q(y) = \frac{1}{2}y^T Sy - b^T y,$$

由 $\nabla Q(y) = -Bx + Cy + h$, 得到

$$\begin{cases} Ax_{k+1} = f - B^T y_k, \\ y_{k+1} = y_k + \alpha(Bx_{k+1} - Cy_k - h), \end{cases}$$

这里 $\alpha > 0$.

3 个问题: x_{k+1} , S , α .

非精确 Uzawa 算法

$$\begin{cases} Ax_{k+1} = f - B^T y_k + \delta_k, \\ y_{k+1} = y_k + \alpha(Bx_{k+1} - Cy_k - h), \end{cases}$$

这里 $\alpha > 0$, $\|\delta_k\| \leq \tau \|\nabla Q(y_k)\|$, τ 为正常数.

参考文献:

H. C. Elman, G. H. Golub, Inexact and preconditioned Uzawa algorithms for saddle point problems, SIAM J. Numerical Analysis, 1994.

预条件 Uzawa 算法

$$\begin{cases} Ax_{k+1} = f - B^T y_k, \\ y_{k+1} = y_k + \alpha Q^{-1}(Bx_{k+1} - Cy_k - h), \end{cases}$$

这里 $\alpha > 0$, $Q \in R^{m \times m}$ 是 S 的预条件矩阵.

参考文献:

J.H. Bramble, J.E. Pasciak and A.T. Vassilev, Analysis of the inexact Uzawa algorithms for saddle point problems, SIAM J. Numerical Analysis, 1997.

BB-Uzawa 算法

$$\begin{cases} Ax_{k+1} = f - B^T y_k, \\ y_{k+1} = y_k + \alpha_k (Bx_{k+1} - Cy_k - h) \end{cases},$$

其中 $\alpha_k = \frac{s_{k-1}^T \hat{y}_{k-1}}{s_{k-1}^T s_{k-1}}$, $s_{k-1} = y_k - y_{k-1}$, $\hat{y}_{k-1} = \nabla Q(y_k) - \nabla Q(y_{k-1})$.

参考文献:

Y.Q. Hu, Y.H. Dai, Inexact Barzilai-Borwein method for saddle point problems, Numerical Linear Algebra and Application, 2007.

非对称鞍点问题

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix},$$

其中 $A \in R^{n \times n}$ 是具有正定性质的非对称矩阵,

$B_1 = B_2 = B \in R^{m \times n}$ 是行满秩矩阵,

$C \in R^{m \times m}$ 是对称半正定矩阵.

非线性 Uzawa 算法 (Bramble, Cao)

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Phi(f - Ax_k - B^T y_k), \\ y_{k+1} = y_k + \tau Q^{-1}(Bx_{k+1} - Cy_k - h), \end{cases}$$

这里 τ 是一个大于 0 的参数, $Q^{-1} \in R^{m \times m}$ 是对称正定的,

$\Phi: R^n \rightarrow R^n$ 是一个非线性映射,

并且函数 $\Phi(v)$ 是方程 $A\xi = v$ 的解 ξ 的近似估计.

参考文献:

J.H. Bramble, J.E. Pasciak and A.T. Vassilev, Uzawa type algorithms for nonsymmetric saddle point problems, Mathematics of Computation, 1999;

Z.H. Cao, Fast algorithm for solving nonsymmetric stabilized saddle point problems, Numerical Linear Algebra Applications, 2004.

修正非线性 Uzawa 算法 (Lin, Wei)

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = x_k + \Phi(f - Ax_k - B^T y_k), \\ y_{k+1} = y_k + Q^{-1}(B\hat{x}_{k+1} - Cy_k - h), \\ x_{k+1} = \hat{x}_{k+1} - \Phi(B^T(y_{k+1} - y_k)), \end{cases}$$

这里 $Q^{-1} \in R^{m \times n}$ 是对称正定的,

$\Phi : R^n \rightarrow R^n$ 是一个非线性映射,

函数 $\Phi(v)$ 是方程 $A\xi = v$ 的解 ξ 的近似估计.

参考文献:

Y. Q. Lin, Y.M. Wei, Corrected Uzawa methods for solving large nonsymmetric saddle point problems, Applied Mathematics and Computation, 2006.

求解非对称鞍点问题的新的算法

鞍点问题可表示为

$$\begin{cases} Ax = -B^T y + f, \\ Sy = b, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $S = BA^{-1}B^T + C$, $b = BA^{-1}f - h$.

对称与非对称问题求解 $Sy = b$ 的对比

对称问题

$$Sy = b \Leftrightarrow \min Q(y) = \frac{1}{2}y^T Sy - b^T y,$$

$$\nabla Q(y) = -Bx + Cy + h,$$

非对称问题

$$Sy = b \Leftrightarrow \min Q_2(y) = \frac{1}{2}(Sy - b)^T (Sy - b),$$

$$\nabla Q_2(y) = S^T(Sy - b).$$

算法的迭代方向与步长

注意到 S 是正定的, 在第 k 次迭代, 可取

$$d_k = -(Sy_k - b) = Bx_k - Cy_k - h.$$

步长取为

$$\alpha_k = \operatorname{argmin}_\alpha Q_2(y_k + \alpha d_k) = \frac{d_k^T C d_k}{d_k^T C^T C d_k}, \quad C d_k \neq 0.$$

新 Uzawa 型算法

- 步 1: 给定初始向量 $y_0 \in R^m$, 令 $k = 0$, $\varepsilon > 0$;
- 步 2: 求解方程 $Ax_{k+1} = f - B^T y_k$, 得 x_{k+1} ;
- 步 3: 计算 $d_k = Bx_{k+1} - Cy_k - h$;
- 步 4: 若 $\|d_k^T C_k^T C_k d_k\| < \varepsilon$, 则终止; 否则计算 $\alpha_k = \frac{d_k^T C_k d_k}{d_k^T C_k^T C_k d_k}$;
- 步 6: 计算 $y_{k+1} = y_k + \alpha_k d_k$;
- 步 7: 检查是否满足终止准则, 若满足则终止, 否则 $k := k + 1$, 转步 2.

数值试验

问题：求解 Navier-Stokes 方程经有限元离散后的非对称鞍点问题，有限元离散是通过软件包 `lfiss 3.1` 在 `Matlab` 环境下完成的。算法的终止条件为 $\|r_k - r_{k-1}\| < 10^{-8}$ 。

Navier-Stokes 方程为：

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + u \cdot \nabla u + \operatorname{grad} p = f \in \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 \in \Omega. \end{cases}$$

类型 1: Channel domain

分割方式: $Q_1 - P_0$ 有限元网格细分,

方形区域 $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ 上选取 Dirichlet 边界条件.

	网格划分	粘度系数	稳定性参数
算例 1 - 1	16×16	0.01	0.25
算例 1 - 2	16×16	1	1
算例 1 - 3	8×8	0.1	1
算例 1 - 4	8×8	1	0.25

Table: Channel domain 类算例参数表

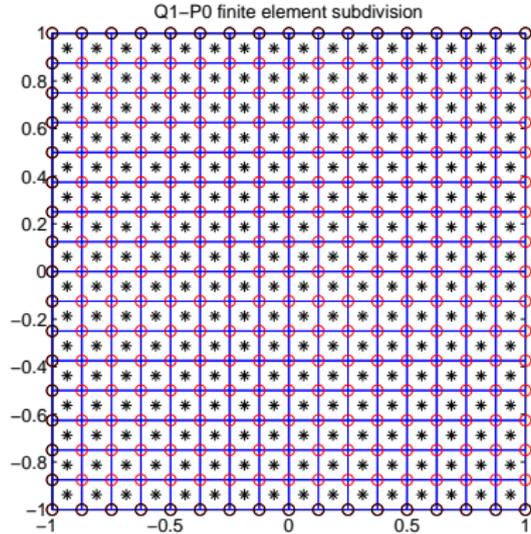
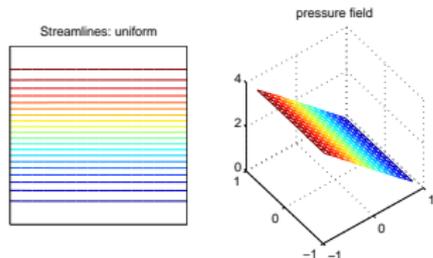
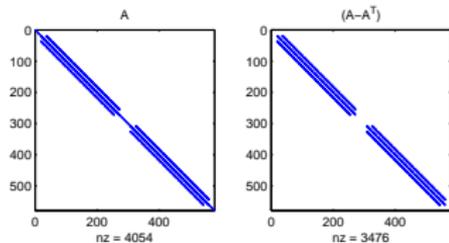


Figure: 算例 1 - 1 网格分布图 - Channel domain



(a) A 和 $A - A^T$ 非零元分布图

(b) stream line 及 pressure field

Figure: Channel domain

类型 2: *Flow over a backward facing step*

分割方式: $Q_1 - P_0$ 有限元网格细分, L 形区域 Ω 为 $(-1, L) \times (-1, 1)$ 去掉 $(-1, 0] \times (-1, 0]$ 的区域, 我们选择 $L = 5$.

	网格划分	粘度系数	稳定性参数
算例 2-1	$8 \times 4 * (L + 1)$	0.02	0.25
算例 2-2	$8 \times 4 * (L + 1)$	0.02	1
算例 2-3	$16 \times 8 * (L + 1)$	0.5	1
算例 2-4	$16 \times 8 * (L + 1)$	0.02	0.25

Table: Flow over a backward facing step 类算例参数表

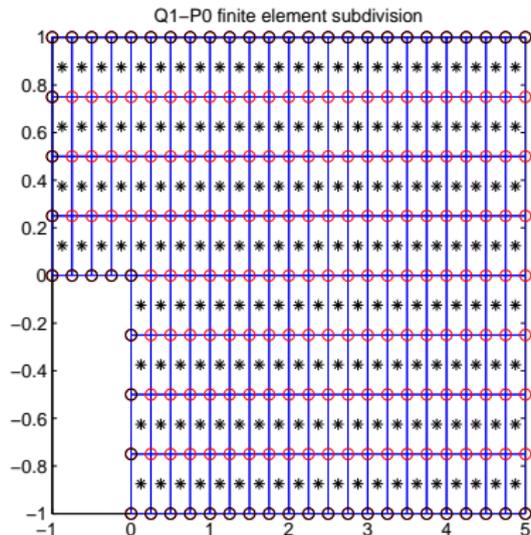
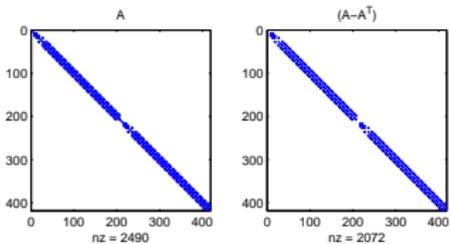
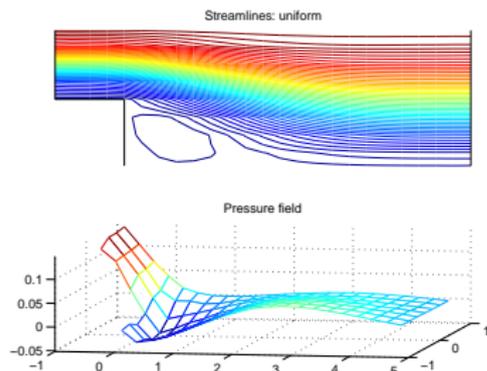


Figure: 算例 2 – 1 网格分布图 - Flow over a backward facing step



(a) A 和 $A - A^T$ 非零元分布图



(b) stream line 及 pressure field

Figure: Flow over a backward facing step

类型 3: Lid driven cavity

	网格划分	缩放选择	粘度系数	稳定性参数
算例 3-1	8×8	缩放扭曲率 =1.3631	0.01	0.25
算例 3-2	8×8	uniform	0.1	1
算例 3-3	16×16	uniform	0.01	1
算例 3-4	16×16	缩放扭曲率 =1.2712	0.1	0.25

Table: Lid driven cavity 类算例参数表

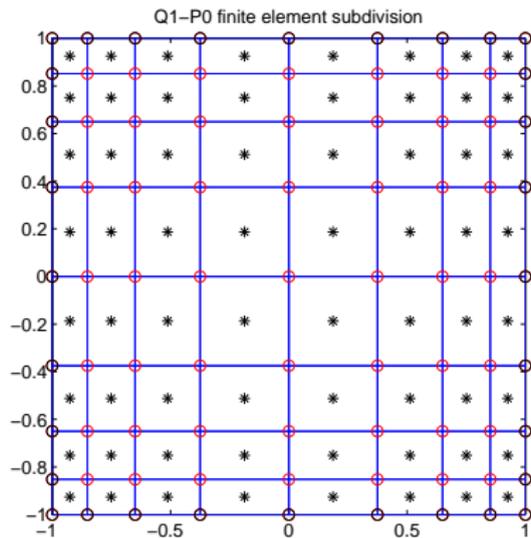
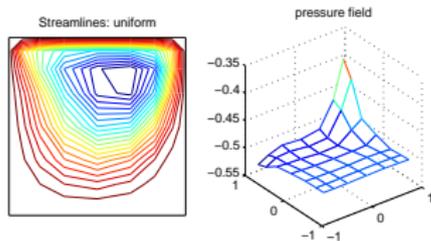
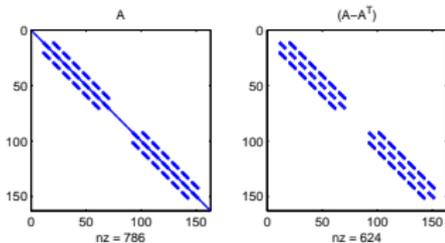


Figure: 算例 3 - 1 网格分布图 - Lid driven cavity



(a) A 和 $A - A^T$ 非零元分布图

(b) stream line 及 pressure field

Figure: field-Lid driven cavity

类型 4: *Flow over an obstacle*

	缩放选择	粘度系数	稳定性参数
算例 4 - 1	uniform	0.02	0.25
算例 4 - 2	uniform	0.2	1
算例 4 - 3	uniform	0.5	0.25
算例 4 - 4	缩放扭曲率 $= (1.3195, 1.131)$	0.02	0.25

Table: Flow over an obstacle 类算例参数表

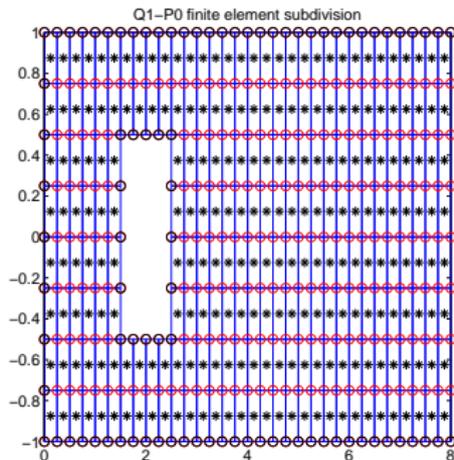
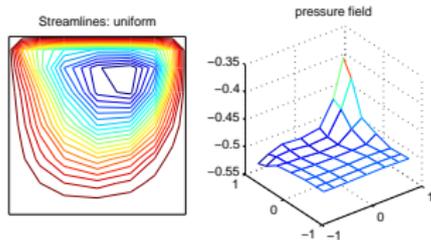
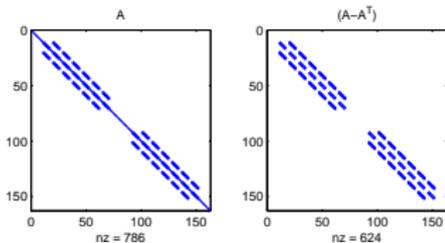


Figure: 算例 4-1 网格分布图 - Flow over an obstacle



(a) A 和 $A - A^T$ 非零元分布图

(b) stream line 及 pressure field

Figure: Flow over an obstacle

	n	m	$\text{cond}(A)$	鞍点问题条件数
算例 1-1	578	256	130.3	196.8
算例 1-2	578	256	75.5	1.9×10^3
算例 1-3	162	64	20.7	99.7
算例 1-4	162	64	19.6	468.1
算例 2-1	418	176	263.0	1.0×10^3
算例 2-2	418	176	292.8	3.3×10^3
算例 2-3	1538	704	167.1	6.7×10^3
算例 2-4	1538	704	864.3	1.0×10^3
算例 3-1	162	64	419.4	2.2×10^{17}
算例 3-2	162	64	48.0	1.1×10^{17}
算例 3-3	578	256	2.7×10^3	3.1×10^{17}
算例 3-4	578	256	132.9	5.4×10^{16}
算例 4-1	576	240	279.9	1.3×10^3

	迭代次数	CPU 时间 (单位: 秒)
算例 1 - 1	214	1.6380
算例 1 - 2	不收敛	—
算例 1 - 3	401	2.3088
算例 1 - 4	不收敛	—
算例 2 - 1	316	1.9812
算例 2 - 2	710	4.2588
算例 2 - 3	790	8.4085
算例 2 - 4	93	1.1076
算例 3 - 1	71	0.3120
算例 3 - 2	65	0.3744
算例 3 - 3	295	1.7628
算例 3 - 4	不收敛	—
算例 4 - 1	122	0.8736

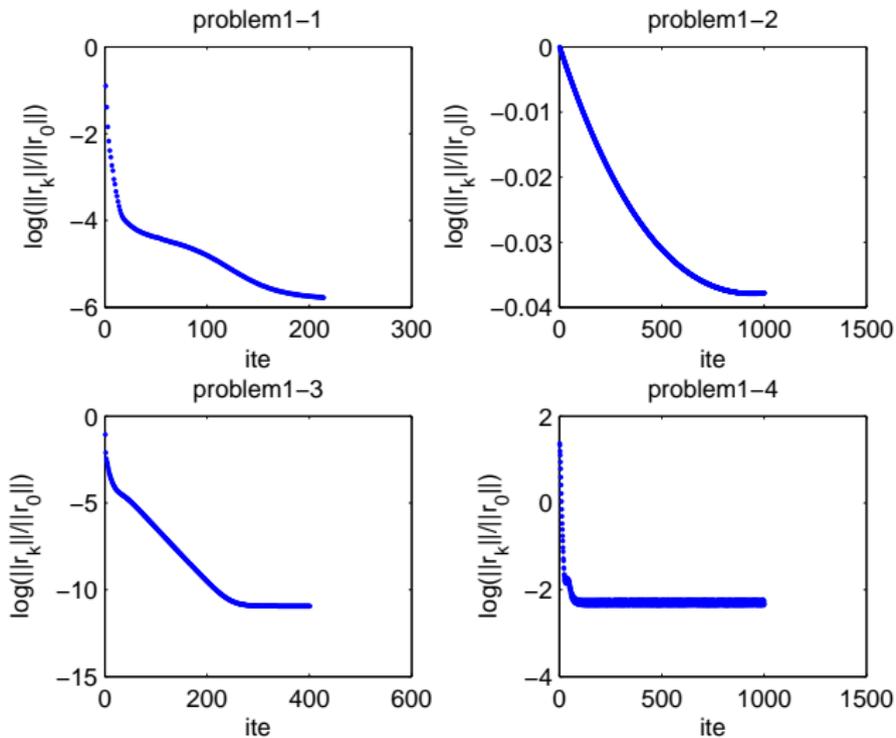


Figure: Channel domain 型问题

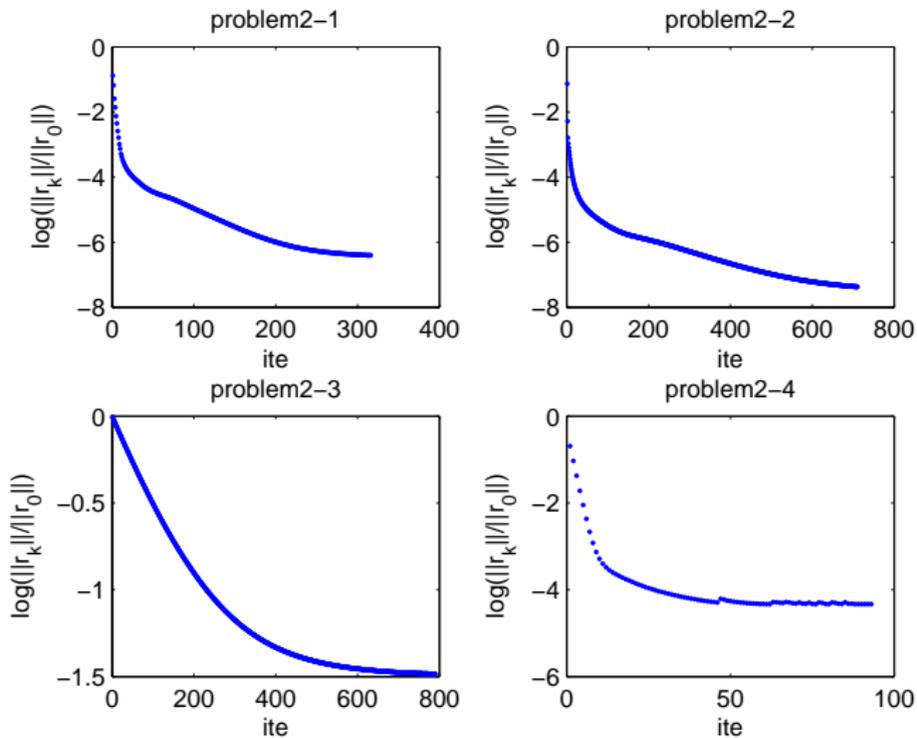


Figure: Flow over a backward facing step 型问题

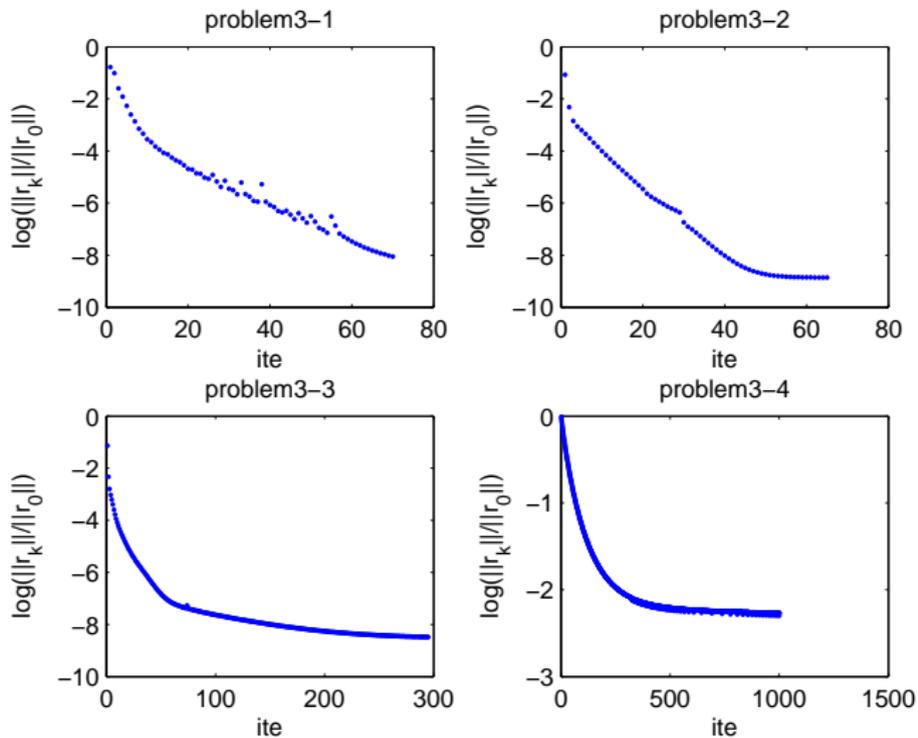


Figure: Lid driven cavity 型问题

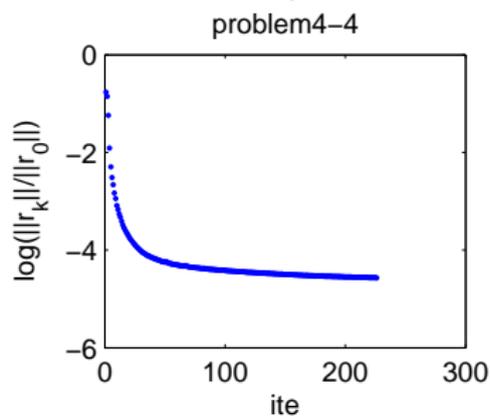
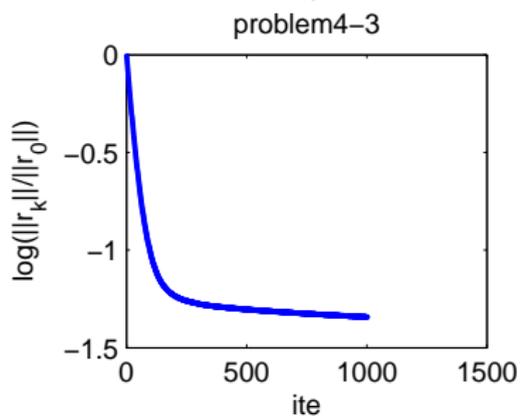
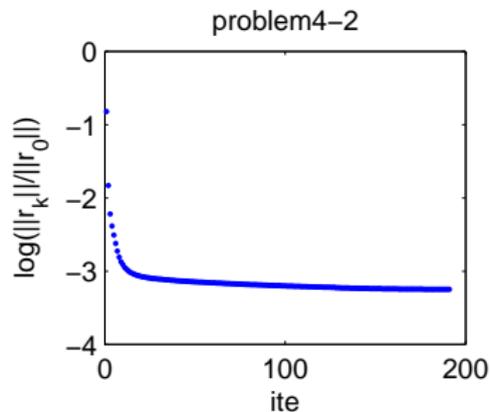
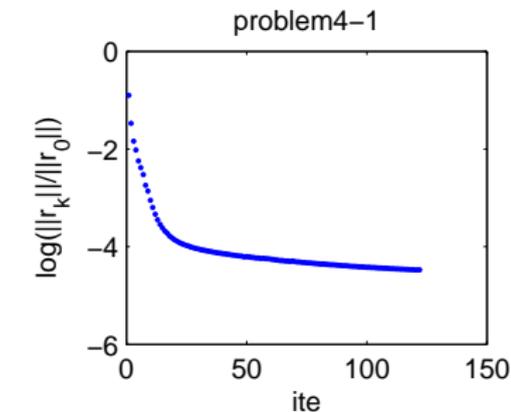


Figure: Flow over an obstacle 型问题

谢谢大家!

祝大家圣诞节, 新年快乐!