

线代 B, 2016 年秋, 修科 + 云考

1. 令 V_1 为严格上三角矩阵的集合, V_2 为严格下三角矩阵的集合, V_3 为对角矩阵的集合, 证明

$$M_n[\mathbb{K}] = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

证明: 任一矩阵可以写成 V_1, V_2, V_3 元素的和, 所以
仅须验证 $V_1 \cap (V_2 + V_3)$, $V_2 \cap (V_1 + V_3)$, $V_3 \cap (V_1 + V_2)$
都等于 $\{0\}$... □

2. 令 $A \in M_4[\mathbb{K}]$. 写出下列操作的矩阵表达, 若无法写出,
给出原因. (1) 从第一、三、四行中减去第二行 (2) 用第三列替
换第四列 (3) 移除第一列 (4) 移除第二行 (5) 第一列取
平均

证明: $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(C_1 A)$ $C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5) 不是线性变换, 所以无法
矩阵表达. □

3. 令 $A \in M_n[\mathbb{R}]$, 证明存在正交矩阵 Q 和上三角矩阵 R 使得
 A 可逆 $A = QR$. (Hint: 施密特正交化)

证明: Schmidt 正交化

$$\beta_1 = \alpha_1 / r_{11}, \beta_2 = \frac{\alpha_2 - r_{12}\beta_1}{r_{22}}, \beta_3 = \frac{\alpha_3 - r_{13}\beta_1 - r_{23}\beta_2}{r_{33}}, \dots, \beta_n = \frac{\alpha_n - \sum_{i=1}^{n-1} r_{ii}\beta_i}{r_{nn}}$$

$$r_{ij} = (\beta_i, \alpha_j) (i \neq j), r_{ii} = \left| \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}\beta_j \right|^2$$



$$\text{令 } Q = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), \text{ by}$$

$$\alpha_1 = r_{11}\beta_1, \alpha_2 = r_{12}\beta_1 + r_{22}\beta_2, \alpha_3 = r_{13}\beta_1 + r_{23}\beta_2 + r_{33}\beta_3 \dots$$

$$\alpha_n = r_{1n}\beta_1 + r_{2n}\beta_2 + \dots + r_{nn}\beta_n.$$

\Rightarrow

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \dots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

□.

4. 若降 $P \in M_n(\mathbb{R})$ 为投影矩阵, 如果 $P^2 = P$. 令

$\text{range}(P) = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$. 则 P 将任一向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 投到

$\text{range}(P)$ 中. 记 $\overset{\text{投影}}{P}$ 是正交投影 $\Leftrightarrow P' = P$.

证明: “ \Leftarrow ” 令 $v \in \mathbb{R}^n$, $Pv \in \text{Range}(P)$. 仅须证明 $(v - Pv, v) = 0$

对任意 $x \in \text{Range}(P)$. 由于 $x \in \text{Range}(P) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n$ 使 $x = Px$.

$$\text{所以 } (v - Pv, v) = (v - Pv, Px) = (Pv - P'Pv, x) \\ = (Pv - P^2v, x) = (0, x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

“ \Rightarrow ” 由于 P 是正交投影, 由 $\forall v, x \in \mathbb{R}^n$

$$(v - Pv, Px) = 0 \Rightarrow ((I - P)v, Px) = 0$$

$$\Rightarrow v'(I - P)'Px = 0 \Rightarrow v'(P - P'P)x = 0.$$

令 v, x 分别为 e_i, e_j , 由 $e_i'(P - P'P)e_j = (P - P'P)_{ij} = 0$.

因此, $P - P'P = 0 \Rightarrow P = P'P \Rightarrow P$ 对称. □



5. 令 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, 且 $AB = BA$. 假设 B 有 n 个不同特征值.

证明 (1) B 的每个特征向量都是 A 的特征向量.

(2) AB 可对角化.

证明: (1) $Bv = \lambda v \Rightarrow$

$$BAv = A(Bv) = A(\lambda v) = \lambda(Av)$$

$\Rightarrow Av$ 是对应的特征向量.

由于 B 的 n 个特征值都不同, 则 A 的特征空间维数为 1. 因此, Av 和 v 线性相关. $\Rightarrow \exists \mu$ s.t. $Av = \mu v$

(2) 由(1), A 有 n 个线性无关特征向量, 所以 A 可对角化. B 也可对角化, 且 A 和 B 有相同的特征向量. 因此

$$A = P^{-1}D_1P, \quad B = P^{-1}D_2P$$

$$AB = P^{-1}D_1P P^{-1}D_2P = P^{-1}D_1D_2P, \quad D_1, D_2 \text{ 为对角矩阵}$$

6. $A \in M_n(\mathbb{R})$ 对称正定, 且有 n 个不同特征值. 证明:

$\lambda_{\max} = \max_{x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x}$, 且当 $x = v_{\max}$ 时达到最大值 (v_{\max} 是对应 λ_{\max} 的特征向量)

证明: $Av_i = \lambda_i v_i$. 不妨假设 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

$$B \in \mathbb{R}^n, \quad x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n, \quad x^T x = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2.$$

$$\begin{aligned} x^T Ax &= x^T A(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) \\ &= x^T (\lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_2 c_2 v_2 + \dots + \lambda_n c_n v_n). \end{aligned}$$

$$\text{因此, } \frac{x^T Ax}{x^T x} = \frac{(\lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \dots + \lambda_n c_n^2)}{(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2)}$$

$$\text{取最大值} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0 \Rightarrow x = c_n v_n \text{ 且 } \max_x \frac{x^T Ax}{x^T x} = \lambda_n$$

7. Lucas 数列: $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \dots$

由如下的公式得出:

$$L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2.$$

求 L_n 的表达式.

解: 注意到

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} L_{n-1} \\ L_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{bmatrix}$$

因此,

$$\begin{bmatrix} L_n \\ L_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} L_{m-1} \\ L_{m-2} \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} L_{m+2} \\ L_{m+1} \end{bmatrix} = \dots = A^{m-1} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_0 \end{bmatrix} = A^{m-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

现求 A^m . 先求 A 的特征值

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

令 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 易算出 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$, 且 $1-\phi = -\frac{1}{\phi}$

求 A 特征向量.

$$A - \phi I = \begin{bmatrix} 1-\phi & 1 \\ 1 & -\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\phi} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{\phi} \end{bmatrix}$$

特征值为 $\begin{bmatrix} \phi \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$A + \frac{1}{\phi} I = \begin{bmatrix} 1+\phi & 1 \\ 1 & \frac{1}{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 1 \\ 1 & \frac{1}{\phi} \end{bmatrix}$$

特征值为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -\phi \end{bmatrix}$.

$$\text{所以 } A = \begin{bmatrix} \phi & 1 \\ 1 & -\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi & 1 \\ 1 & -\phi \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow A^m = \begin{bmatrix} \phi & 1 \\ 1 & -\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^n & (-1/\phi)^n \\ (-1)^n \frac{1}{\phi^n} & \phi^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi & 1 \\ 1 & -\phi \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow A^m = \frac{1}{\phi + 1/\phi} \begin{bmatrix} \phi^n - (-1/\phi)^n & \phi^n - (1/\phi)^{n-1} \\ \phi^{n-1} - (-1/\phi)^{n-1} & \phi^{n-2} - (1/\phi)^{n-2} \end{bmatrix}.$$



从而有 $\begin{bmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^n + (-1/\phi)^n \\ \phi^{n-1} + (-1/\phi)^{n-1} \end{bmatrix}$.

$$L_n = \phi^n + (-1/\phi)^n.$$

8. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) < n$, 证明
 A, B 有共同特征值与特征向量.

证明: $\text{rank}(A) < n \Rightarrow A$ 不可逆 $\Rightarrow 0$ 是 A 的特征值.
同理, 0 也是 B 的特征值. 若要 0 是 A, B 对于 0 的特征
向量, 一个充分条件是

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}x = 0 \text{ 有非零解.}$$

$$\Leftrightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} < n.$$

由于 $\text{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \text{rank} [A^T B^T] \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) < n$
从而 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}x = 0$ 有非零解 □

9. $T(X)$ 为 $M_2(\mathbb{R})$ 上的变换: $T(X) = AX - XA$, $A \in M_2(\mathbb{R})$
证明(1) $T(X)$ 是一个线性变换; (2) $T(X)$ 是否可逆?

证明: ① $T(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = AX + XY - YA - YA$
 $= T(X) + T(Y)$

$$T(kX) = A(kX) - kX A = k(AX - XA) = kT(X).$$

② E_1, E_{12}, E_2, E_{22} 是 $M_2(\mathbb{R})$ 的一组基.



$$T(E_{11}) = -b\bar{E}_{12} + c\bar{E}_{21}$$

$$T(E_{12}) = -c\bar{E}_{11} + (a-d)\bar{E}_{12} + c\bar{E}_{22}$$

$$T(E_{21}) = b\bar{E}_{11} + (d-a)\bar{E}_{21} - b\bar{E}_{22}$$

$$T(E_{22}) = b\bar{E}_{12} - c\bar{E}_{21}$$

T 在基下矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{bmatrix}$$

不可逆

□.

10. 令 $T \in GM_n(\mathbb{K})$, T 上三角且 $T'T = TT'$. 证明 T 是对角矩阵.
证明:

(I) “归纳法”: 当 $n=1$ 显然. 设该题在 n 时成立. 考虑 n 的情形.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \alpha' \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ \alpha & T_1' \end{pmatrix}$$

$$TT' = \begin{pmatrix} t_{11}^2 + \alpha'^2 & \alpha T_1' \\ \alpha T_1 & T_1 T_1' \end{pmatrix} \quad T'T = \begin{pmatrix} t_{11}^2 & t_{11}\alpha' \\ \alpha t_{11} & \alpha^2 + T_1' T_1 \end{pmatrix}$$

由 $TT' = T'T$ 得到 $\alpha = 0$, 且 $T_1 T_1' = T_1' T_1$. 由归纳假设 $T_1 = D_1$ (α 为角). 因此 $T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$ 也是对角矩阵

$$(II) (TT')_{ijk} = \sum_j (T)_{ij} (T')_{jk} = \sum_j t_{ij} t_{kj}$$

$$(T'T)_{ijk} = \sum_j (T')_{ij} (T)_{jk} = \sum_j t_{ji} t_{jk}$$

当 $i=k=1$ 时, 我们有 $\sum_j t_{1j}^2 = \sum_j t_{j1}^2 = t_{11}^2$ (T 上三角).

因此, $t_{1j}=0$, $j=2, 3, \dots, n$.

当 $i=k=2$ 时, $\sum_j t_{2j}^2 = \sum_j t_{j2}^2 = t_{22}^2$ (T 上三角和 $t_{12}=0$)

因此, $t_{2j}=0$, $j=3, 4, \dots, n$ $\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$ □



11. 令 V 为 n 维欧式空间，证明

1) $v \in V$, y_1, \dots, y_n 是 V 的一个标准正交基，则

$$\sum_{i=1}^n (v, y_i)^2 = \|v\|^2$$

2) 令 $V = \mathbb{R}^n$, y_1, \dots, y_n 是 V 的一个基，则存在 V 的另一组基 r_1, \dots, r_n 使得 $\forall v \in V$, $v = \sum_{k=1}^n (v, r_k) r_k$, 且 $(r_k, r_j) = \delta_{kj}$

证明：1) $v = \sum_{k=1}^n (v, r_k) r_k$ 两边对 v 取内积。

2) 存在一个同构变换 T 使得 $T e_k = r_k$, $\{e_k\}$ 是 \mathbb{R}^n 的标准正交基。则 对 $\forall v \in V$

$$T^{-1}v = \sum_{k=1}^n (T^{-1}v, e_k) e_k = \sum_{k=1}^n (v, T^{-1}e_k) e_k.$$

令 $y_k = (T^{-1})' e_k$, 则

$$v = T T^{-1}v = T \left(\sum_{k=1}^n (v, r_k) e_k \right) = \sum_{k=1}^n (v, r_k) r_k.$$

$\{r_k\}$ 是 \mathbb{R}^n 的基，因为 $(T^{-1})'$ 可逆。且

$$(r_k, r_j) = ((T^{-1})' e_k, T e_j) = (e_k, e_j) = \delta_{kj}. \square$$

12. 求 $|A_n| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & & \\ 1 & 3 & 2 & \\ & 1 & 3 & \cdots & 2 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \end{vmatrix}$ (n 级矩阵的计算)。

解：令 $D_n = |A_n|$. 有 $D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{类似第7题} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$D_n = 4 \cdot 2^{n-1} - 1$$

□