一般均衡理论简介

- 偏好与效用函数
- 消费
- 生产
- 均衡
- 不确定性的经济

夏建明
中国科学院数学与系统科学研究院

参考文献

主要取材于

- Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green (1995): *Microeconomic Theory*. Oxford University Press. 上海财经大学出版社有引进版.

其它参考文献:

- Jehle, G. A., and P. J. Reny (2001): *Advanced Microeconomic Theory (2nd Edition)*. Pearson Education. 上海财经大学出版社有引进版.
- 胡适耕 (2003) : *微观经济的数理分析*. 华中科技大学出版社.

1. 偏好与效用函数

选择集

所有备择对象 (alternative) 构成的集合称为选择集, 并记为 X.

Example (消费集)

假设共有 L 种商品 (commodity) 可供消费, 则商品空间为 $\mathbb{R}^L$.

一般地, 商品可以是物品 (goods) 或服务 (service) .

消费向量 (comsumption vector) , 亦称消费束 (consumption bundle) : $x = (x_1, \ldots, x_L) \in \mathbb{R}^L$.

消费集 $X \subseteq \mathbb{R}^L$. 一般考虑 $X = \mathbb{R}^L_+$. □

一个偏好关系 (preference relation) $\succsim$ 是 X 上的一个二元关系.

$\forall\, x, y \in X$, $x \succsim y$ 表示 “x 不劣于 y” 或简而言之 “x 优于 y” .

两个导出关系:

- 严格偏好关系 $\succ$:

$$x \succ y \iff x \succsim y \text{ 且 } y \not\succsim x.$$

  称为 “x 严格优于 y” .

- 无差异关系 $\sim$:

$$x \sim y \iff x \succsim y \text{ 且 } y \succsim x.$$

  称为 “x 与 y 无差异” .

Definition

称 X 上的一个偏好关系 $\succsim$ 为理性偏好关系, 如果它满足下列条件:

(i) 完全性: 对所有 $x, y \in X$, 要么 $x \succsim y$, 要么 $y \succsim x$;

(ii) 传递性: 对任何 $x, y, z \in X$, 若 $x \succsim y$, $y \succsim z$, 则 $x \succsim z$.

为方便计, 以后“理性偏好关系”就简称为“偏好”.

Definition

如果函数 $u : X \to \mathbb{R}$ 满足条件:

$$\forall\, x, y \in X,\ \ x \succsim y \Longleftrightarrow u(x) \geq u(y),$$

则称 $\succsim$ 可被函数 u 所表示. 通常, u 被称为效用函数 (utility function) .

如果 $\succsim$ 被 u 所表示, 则对任何严格递增的函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \circ u$ 也可表示 $\succsim$.

并非所有的偏好都有效用函数表示.

Proposition

如果 X 为可数集, 则 X 上所有的偏好都有效用函数表示.

Definition

考虑 X 的子集 Z. 称 Z 为 X 的 $\succsim$-稠子集, 如果对任何 $x, y \in X$, $x \succ y$, 都存在 $z \in Z$ 使得: $x \succsim z \succsim y$.

Theorem (康托 (Cantor))

X 上的偏好 $\succsim$ 有效用函数表示当且仅当 X 有一个可数的 $\succsim$-稠子集.

Example (字典序)

考虑 $X = \mathbb{R}_+^2$ 上的字典序 (偏好) $\succsim$:
$\forall\, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$,

$$x \succsim y \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 > y_1 \text{ 或} \\ x_1 = y_1 \text{ 但 } x_2 \geq y_2. \end{cases}$$

可以证明, 该偏好没有效用函数表示. □

x-无差异集: $\{y \in X : y \sim x\}$

x-上水平集: $\{y \in X : y \succsim x\}$

x-下水平集: $\{y \in X : x \succsim y\}$

Definition

考虑拓扑空间 X 上的一个偏好 $\succsim$. 称 $\succsim$ 为连续的, 如果对任何 $x \in X$, x-上水平集与 x-下水平集均为闭集.

Exercise

考虑 $X \subseteq \mathbb{R}^L$ 上的偏好 $\succsim$, 其中 $L \geq 1$. 证明下述条件等价:

(i) $\succsim$ 连续;

(ii) 若 $x^n \succsim y^n$, $x^n \to x$, $y^n \to y$, 则 $x \succsim y$;

(iii) 若 $y^n \succsim x$, $y^n \to y$, 则 $y \succsim x$;
此外, 若 $x \succsim z^n$, $z^n \to z$, 则 $x \succsim z$.

Definition

拓扑空间 X 是连通的, 如果不存在如下分解:

$$X = A \cup B,\ \ A, B \text{ 为非空开集, 且 } A \cap B = \emptyset.$$

Proposition

设 $\succsim$ 为连通拓扑空间 X 上的一个连续偏好, 则 X 的任何拓扑稠子集都是 X 的 $\succsim$-稠子集.

Theorem

可分、连通拓扑空间 X 上的任何连续偏好 $\succsim$, 都可被 X 上的一个连续效用函数 u 所表示.

Corollary

设 X 为 $\mathbb{R}^L$ 的凸子集, 则 X 上的任何连续偏好 $\succsim$ 都可被 X 上的一个连续效用函数 u 所表示.

下面, $\succsim$ 为消费集 $X \subseteq \mathbb{R}_+^L$ 上的偏好, x, y, z 均属于 X.

对任何 $x = (x_1, \ldots, x_L)$ 以及 $y = (y_1, \ldots, y_L)$, 约定下列记号:

$$
\begin{aligned}
x \geq y &\iff x_l \geq y_l,\ \forall\, l; \\
x > y &\iff x_l \geq y_l,\ \forall\, l,\ \text{且至少有一个严格不等式成} \\
x \gg y &\iff x_l > y_l,\ \forall\, l.
\end{aligned}
$$

Definition

称 $\succsim$ 为单调的, 如果 $y \gg x \Longrightarrow y \succ x$;
称 $\succsim$ 为强单调的, 如果 $y > x \Longrightarrow y \succ x$; 这里, 我们隐含假定 X 满足: $x \in X, y \geq x \Longrightarrow y \in X$.

Theorem

$X = \mathbb{R}_+^L$ 上的任何一个单调、连续偏好 $\succsim$ 都可被一个单调、连续的效用函数所表示.

Definition

称 $\succsim$ 为*局部非饱和的* (locally nonsatiated) , 如果对任意 $x \in X$ 以及 $\varepsilon > 0$, 存在 $y \in X$ 使得: $\|y - x\| \leq \varepsilon$ 且 $y \succ x$.

局部非饱和性意味着任何无差异集都是“稀疏的 (thin) ” , 即没有内点.

Definition

设 X 为凸集. 称 $\succsim$ 为凸的, 如果对任意 $x \in X$, x-上水平集均为凸集;

或等价地, $y \succsim x$, $z \succsim x$, $\alpha \in (0,1) \Longrightarrow \alpha y + (1-\alpha) z \succsim x$.

称 $\succsim$ 为严格凸的, 如果 $y \succsim x$, $z \succsim x$, $y \neq x$, $\alpha \in (0,1) \Longrightarrow \alpha y + (1-\alpha) z \succ x$.

$\succsim$ 的凸性意味着: 消费的 “分散化” 或 “多元化” 倾向、“边际替代率递减”.

Definition

考虑函数 $u : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$. 称 u 为拟凹函数, 如果对任意 $x \in \mathbb{R}_+^L$, $\{y \in \mathbb{R}_+^L : u(y) \geq u(x)\}$ 为凸集;

或等价地, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^L, \alpha \in (0, 1)$,

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}.$$

称 u 为严格拟凹函数, 如果 $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^L, x \neq y, \alpha \in (0, 1)$,

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \min\{u(x), u(y)\}.$$

$\mathbb{R}_+^L$ 上连续的偏好 $\succsim$ 可由一个连续效用函数 u 所表示. 此外,

$$\succsim \text{ 凸} \iff u(\cdot) \text{ 拟凹;}$$
$$\succsim \text{ 严格凸} \iff u(\cdot) \text{ 严格拟凹.}$$

2. 消费

假设消费者在消费集 $X = \mathbb{R}^L_+$ 上的偏好 $\succsim$ 连续、局部非饱和.

这样, $\succsim$ 可被一个连续效用函数 u 所表示.

价格向量 $p = (p_1, \dots, p_L)$.

p_l 可以是负的, 比如商品 l 为“垃圾”.
而对于免费商品, 则其价格为零.

为简单计, 一般假定 $p \gg 0$.

给定价格向量 p 以及财富水平 w, 由于财务性的限制, 考虑 Walras 预算集 (亦称竞争预算集) :

$$B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x \leq w\}.$$

相应地, 预算超平面为 $\{x \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x = w\}$, 其法向量为 p.

特别地, $L = 2$ 时, 它实际上是预算线, 斜率为 $-\frac{p_1}{p_2}$. 固定 p_1 与 w, p_2 越低, 则预算线越陡.

实际上, 我们还隐性地假定: 消费者是价格接受者 (price-taker) , 即消费者不考虑其消费行为对商品价格的影响.

给定价格向量 $p \gg 0$ 以及财富水平 $w > 0$, 消费者的目标是如下效用最大化问题:

$$\begin{aligned}(\text{UMP}): \quad & \max_{x \geq 0} \quad u(x) \\ & \text{subject to} \quad p \cdot x \leq w.\end{aligned}$$

由于 $p \gg 0$ 以及 $w > 0$, (UMP) 有解.

(UMP) 的解集 (最优消费向量集) 称为 Walras 需求对应, 记为 $x(p, w)$.

特别地, 若解唯一, 即 $x(p, w)$ 是单值的, 则称其为 Walras 需求函数.

Proposition

设 u 连续, $\succsim$ 局部非饱和. 则 $x(p, w)$ 满足下列性质:

(i) 零阶齐次性:
$x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w)$, $\forall\,(p, w)$ 及 $\alpha > 0$;

(ii) Walras 律:
$p \cdot x = w$, $\forall\, x \in x(p, w)$;

(iii) 凸性/单值性:
若 $\succsim$ 凸, 即 $u(\cdot)$ 拟凹, 则 $x(p, w)$ 为凸集;
若 $\succsim$ 严格凸, 即 $u(\cdot)$ 严格拟凹, 则 $x(p, w)$ 为单值的.

Definition

设 $D \subseteq \mathbb{R}^L$, $F: D \to \mathbb{R}^L$ 为一对应. 称 F 在 D 上上半连续 (upper hemicontinuous) , 如果

$$x^n \in D, x^n \to x \in D, y^n \in F(x^n), y^n \to y \Longrightarrow y \in F(x)$$

Proposition

设 u 连续, $\succsim$ 局部非饱和. 则 $x(p,w)$ 对 $(p,w) \gg 0$ 上半连续. 此外, 若 $x(p,w)$ 单值, 则它连续.

若 $u(\cdot)$ 连续可微, $x^* \in x(p,w)$, 则 x^* 满足一阶条件 (Kuhn-Tucker 条件): 存在 $\lambda \geq 0$ 以及 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_L) \geq 0$, 使得:

$$\begin{cases} \nabla u(x^*) = \lambda p - \mu \\ \mu_l x_l^* = 0, \ 1 \leq l \leq L, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_l} \leq \lambda p_l, & 1 \leq l \leq L \\ \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_l} = \lambda p_l, & \text{若 } x_l^* > 0, \end{cases}$$

等价地,

$$\begin{cases} \nabla u(x^*) \leq \lambda p \\ x^* \cdot [\nabla u(x^*) - \lambda p] = 0. \end{cases}$$

第一、内点解情形: $x^* \gg 0$.

在这种情况下, $\nabla u(x^*) = \lambda p$.

进一步, 如果 u 是强单调的, 则还有 $\lambda > 0$, 从而 $\nabla u(x^*) \gg 0$.

于是,

$$\frac{\partial u(x^*)/\partial x_l}{\partial u(x^*)/\partial x_k} = \frac{p_l}{p_k}, \ \forall 1 \leq l, k \leq L.$$

左边 $\frac{\partial u(x^*)/\partial x_l}{\partial u(x^*)/\partial x_k} =: \mathrm{MRS}_{lk}(x^*)$ 为在 x^* 处, 商品 l 对商品 k 的边际替代率 (Marginal Rate of Substitution) .

右边 $\frac{p_l}{p_k}$ 为商品 l 对商品 k 的交换率.

在最优消费向量 $x^* \gg 0$ 处, 必有 $\mathrm{MRS}_{lk}(x^*) = \frac{p_l}{p_k}$.

否则, 如果 $\mathrm{MRS}_{lk}(x^*) > \frac{p_l}{p_k}$,[1] 则对消费者而言, 在 $x^* \gg 0$ 处, 按市场价格进行比较的话, 商品 l 相对于商品 k 较为便宜.

[1]另外一种情形可类似讨论.

于是该消费者可以增加消费 dx_l 件商品 l, 同时相应地减少消费 $\frac{p_l}{p_k}dx_l$ 件商品 k, 而保持其它商品的消费量不变.

这样的调整保持预算不变:

$$dw = p_l dx_l + p_k dx_k = p_l dx_l + p_k \left(-\frac{p_l}{p_k} dx_l \right) = 0.$$

但效用的增量:

$$du(x^*) = \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_l} dx_l - \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} \frac{p_l}{p_k} dx_l > 0.$$

这与 x^* 的最优性矛盾.

第二、边界解情形: 对某种商品 k, $x_k^* = 0$.

在这种情形下, 必对某种商品 l, $x_l^* > 0$.

这时, 由一阶条件,

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_l} = \lambda p_l, \ \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k} \leq \lambda p_k.$$

于是,

$$\mathrm{MRS}_{lk}(x^*) = \frac{\partial u(x^*)/\partial x_l}{\partial u(x^*)/\partial x_k} \geq \frac{p_l}{p_k}.$$

即使 $\mathrm{MRS}_{lk}(x^*) > \frac{p_l}{p_k}$, 换言之, 对消费者而言, 在 x^* 处, 即使按市场价格进行比较, 商品 l 相对于商品 k 较为便宜, 但由于 $x_k^* = 0$, 无法再通过增加消费商品 l、减少消费商品 k 来增加效用了.

Lagrange 乘子 λ 的经济含意.

设 $x(p,w)$ 为可微函数且 $x(p,w) \gg 0$.

固定 $p \gg 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x(p,w))}{\partial w} &= \nabla u(x(p,w)) \cdot D_w x(p,w) \\ &= \lambda p \cdot D_w x(p,w) = \lambda,\end{aligned}$$

其中最后一个等式由 Walras 律而来.

于是,

$$\boxed{\text{财富的边际效用} = \text{Lagrange 乘子 } \lambda.}$$

试讨论一阶条件: $\frac{\partial u(x(p,w))}{\partial x_l} = \lambda p_l$.

3. 生产

生产集

生产向量 (亦称生产计划、净产出向量、投入-产出向量)：$y = (y_1, \ldots, y_L) \in \mathbb{R}^L$.

生产集: $Y = \{y \in \mathbb{R}^L : y$ 在技术上是可行的$\}$.

转换函数

Definition

如果 $F(\cdot) : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ 满足:

(i) $Y = \{y \in \mathbb{R}^L : F(y) \leq 0\}$, 以及

(ii) $F(y) = 0 \Longleftrightarrow y \in \partial Y$,

则称 $F(\cdot)$ 为相应于生产集 Y 的转换函数 (transformation function) .

而 $\{y \in \mathbb{R}^L : F(y) = 0\} = \partial Y$ 称为转换前沿 (transformation frontier) .

设 $\bar{y} \in \partial Y$. 在 $\bar{y}$ 处, 商品 l 对商品 k 的边际转换率 (Marginal Rate of Transformation) 为:

$$\mathrm{MRT}_{lk}(\bar{y}) = \frac{\partial F(\bar{y})/\partial y_l}{\partial F(\bar{y})/\partial y_k}.$$

它所代表的经济含意是: 在 $\bar{y}$ 处, 如果少投入 (多生产) dx_l 件商品 l, 而又想保持在转换前沿上, 则必须以多投入 (少生产) $\mathrm{MRT}_{lk}(\bar{y})dx_l$ 件商品 k 作为弥补.

当然在以上讨论中, 假设其它商品的投入-产出保持不变.

生产函数

对每个生产向量而言, 某种商品是投入还是产出依其符号而定.

如果设定某些商品为投入, 其它商品为产出, 且这种设定对所有 Y 中的生产向量都成立, 则可考虑生产函数.

例如, 某 M 种商品为产出, 其它 $L-M$ 种商品为投入, 则产出可用向量 $q=(q_1,\ldots,q_M)\geq 0$ 表示, 投入可用向量 $z=(z_1,\ldots,z_{L-M})$ 表示.

特别地, $M=1$ 时为单一产出技术, 此时生产函数为 $q=f(z)$, $z=(z_1,\ldots,z_{L-1})\geq 0$.

当然, $f(z)\geq 0$.

含意: 当投入为 z 时, 最大产出量为 $f(z)$.

相应地, 生产集为

$$Y=\{(-z_1,\ldots,-z_{L-1},q): q-f(z_1,\ldots,z_{L-1})\leq 0,\ (z_1,\ldots,z_{L-1})\geq 0\}.$$

这时, 转换函数为
$F(-z_1,\ldots,-z_{L-1},q)=q-f(z_1,\ldots,z_{L-1})$.

在 $\bar{z}$ 处, 边际技术替代率 (Marginal Rate of Technical Substitution) 为:

$$\mathrm{MRTS}_{lk}(\bar{z}) = \frac{\partial f(\bar{z})/\partial z_l}{\partial f(\bar{z})/\partial z_k}.$$

它所代表的经济含意是: 减少 dz_l 件投入品 l 而又想保持最大产出量不变, 则必须增加 $\mathrm{MRTS}_{lk}(\bar{z})dz_l$ 件投入品 k 作为弥补.

关于生产集的一些常用条件

(i) 允许无所作为 (inaction) : $0 \in Y$. 拥有生产技术, 但可以不组织生产.

一旦已经投入生产, 则不可逆转, 无所作为不再可能. 此时, 就有了沉没成本 (sunk cost) .

(ii) 没有免费午餐 (no free lunch) , 即不能无中生有:

$$y \in Y, y \geq 0 \Longrightarrow y = 0,$$

换言之, $Y \cap \mathbb{R}_+^L \subseteq \{0\}$.

(iii) 自由销毁 (free disposal) :

$$y \in Y, y' \leq y \Longrightarrow y' \in Y,$$

换言之, $Y - \mathbb{R}^L_+ \subseteq Y$. “多投入、少生产”在技术上是可行的.

(iv) 不可逆 (irreversibility) :
$y \in Y, y \neq 0 \Longrightarrow -y \notin Y$.

(v) 规模收益递减 (nonincreasing returns to scale) :

$$y \in Y, \alpha \in (0,1) \Longrightarrow \alpha y \in Y.$$

生产函数情形: $f(\alpha z) \geq \alpha f(z)$, $\forall\, \alpha \in [0,1]$.

(vi) 规模收益递增 (nondecreasing returns to scale) :

$$y \in Y, \alpha \geq 1 \Longrightarrow \alpha y \in Y.$$

生产函数情形: $f(\alpha z) \geq \alpha f(z)$, $\forall\, \alpha \geq 1$.

(vii) 规模收益不变 (constant returns to scale) : Y 为锥 (cone) .

$$y \in Y, \alpha \geq 0 \Longrightarrow \alpha y \in Y.$$

生产函数情形: $f(\alpha z) = \alpha f(z)$, $\forall\, \alpha \geq 0$.

(viii) 可加性 (自由进入) :

$$y, y' \in Y \Longrightarrow y + y' \in Y.$$

(ix) 凸性: Y 为凸集.
$0 \in Y$, Y 为凸集 $\Longrightarrow$ 规模收益递减;
对单一产出技术, Y 为凸集 $\Longleftrightarrow$ $f(\cdot)$ 凹.

(ix) Y 为凸锥: 凸性+规模收益不变, 即

$$y, y' \in Y, \alpha, \alpha' \Longrightarrow \alpha y + \alpha' y' \in Y.$$

Y 为凸锥 $\Longleftrightarrow$ Y 可加并且规模收益递减.

利润最大化

假定: $p \gg 0$, Y 为非空闭集, $Y - \mathbb{R}^L_+ \subseteq Y$.

此外, 还假定企业是价格接受者: 企业不考虑它的生产活动对商品价格影响.

企业的目标是利润最大化, 即

$$\max_y p \cdot y \quad \text{subject to } y \in Y.$$

若转换函数为 $F(\cdot)$, 则其目标为:

$$\text{(PMP)}: \qquad \max_y p \cdot y \quad \text{subject to } F(y) \le 0.$$

解集记为 $y(p)$, 称为供给对应/函数.
利润函数为 $\pi(p) = p \cdot y$, $y \in y(p)$.

等利润线 (iso-profit line) 为 $\{y \in \mathbb{R}^L : p \cdot y = b\}$, $b \in \mathbb{R}$.

利润最大化问题 (PMP) 未必有解. 如果有解 $y^* \in y(p)$, 则 y^* 满足 Kuhn-Tucker 条件:

$$\begin{cases} p = \lambda \nabla F(y^*), \\ \lambda F(y^*) = 0, \\ \lambda \geq 0, F(y^*) \leq 0. \end{cases}$$

由于 $p \gg 0$, 从而 $\lambda > 0$, $F(y^*) = 0$. 故

$$p = \lambda \nabla F(y^*), \quad \lambda > 0, \quad F(y^*) = 0.$$

即有

$$\mathrm{MRT}_{lk}(y^*) = \frac{\partial F(y^*)/\partial y_l}{\partial F(y^*)/\partial y_k} = \frac{p_l}{p_k}, \quad \forall\, l, k.$$

否则, 若 $\mathrm{MRT}_{lk}(y^*) > \frac{p_l}{p_k}$,则可以通过适当增加投入商品 l 同时适当减少投入商品 k来提高利润.

Proposition

设 Y 为闭集, $Y - \mathbb{R}^L_+ \subseteq Y$. 则有:

(i) $\pi(\alpha p) = \alpha \pi(p)$, $\forall\, \alpha > 0$;

(ii) $\pi(\cdot)$ 为凸函数;

(iii) $y(\alpha p) = y(p)$, $\forall\, \alpha > 0$;

(iv) Y 凸 $\Longrightarrow y(p)$ 凸, $\forall\, p$,
Y 严格凸 $\Longrightarrow y(p)$ 为单点集 (若非空);

(v) 供给定律:
对任何 p, p' 以及 $y \in y(p), y' \in y(p')$ 有
$(p - p') \cdot (y - y') \geq 0.$
等号成立当且仅当 $y \in y(p'), y' \in y(p)$.

(vi) 连续性:
$y(p)$ 对 $p \gg 0$ 上半连续;
若 $y(p)$ 单值且局部有界 (即在每一点的一个邻域内有界) , 则它在通常意义下连续.

(v) 的证明

首先有: $p \cdot y = \pi(p)$, $p' \cdot y' = \pi(p')$. 于是,

$$(p-p')\cdot(y-y') = [\pi(p)-p\cdot y']+[\pi(p')-p'\cdot y] \geq 0.$$

等号成立
$\Leftrightarrow \pi(p) - p \cdot y' = 0 = \pi(p') - p' \cdot y$
$\Leftrightarrow y \in y(p')$, $y' \in y(p)$.

(vi) 的证明

设 $y^n \in y(p^n)$, $p^n \gg 0$, $p^n \to p \gg 0$, $y^n \to y$.

由于 Y 为闭集, $y \in Y$. 对任何 $y' \in Y$, 有 $p^n \cdot y' \le p^n \cdot y^n$. 关于 n 取极限, 可得 $p \cdot y' \le p \cdot y$. 故 $y \in y(p)$. 上半连续性得证.

设 $y(p)$ 单值且局部有界, $p^n \gg 0$, $p^n \to p \gg 0$, $y^n = y(p^n)$.

由局部有界性, $\{y^n\}$ 必有界, 从而有收敛子列. 设$y^{n_k} \to y$, 则由上半连续性可得 $y = y(p)$, 从而 $y(p^{n_k}) \to y(p)$.

将此结论用于 $\{p^n\}$ 的每一个子列可得 $y(p^n) \to y(p)$. 故连续性得证. $\square$

汇总

有 J 个企业, 生产集分别为 Y_j, $1 \le j \le J$.

假设对所有 j, Y_j 为非空闭集, $Y_j - \mathbb{R}^L_+ \subseteq Y_j$. 对各个企业 j:

- 利润函数: $\pi_j(p)$;
- 供给对应/函数: $y_j(p)$.

于是, *总利润*为 $\sum_j \pi_j(p)$, *总供给对应/函数*为 $\sum_j y_j(p)$.

另一方面, *总生产集*为 $Y = \sum_j Y_j$. 相应于 Y, 利润函数为 $\pi^*(p)$, 供给对应/函数为 $y^*(p)$.

Proposition

对任何 $p \gg 0$, *有:*

(i) $\pi^*(p) = \sum_j \pi_j(p)$;

(ii) $y^*(p) = \sum_j y_j(p)$.

Y 可视为代表性生产者的生产集. 以上命题表明:

代表性生产者的利润＝总利润,
代表性生产者的供给＝总供给.

有效生产

Definition

给定 $y \in Y$. 称 y 为有效的, 如果不存在 $y' \in Y$ 使得: $y' > y$, 换言之, $y' > y \Longrightarrow y' \notin Y$.

Proposition

若 $p \gg 0$, $y \in y(p)$. 则 y 是有效的.

Corollary

给定价格向量 $p \gg 0$, 如果每个企业追求利润最大化, 则总生产是有效的. 即找不到其它的总生产计划, 使其同时少投入、多产出.

Proposition

设 Y 为凸集, 则对任何有效的 $y \in Y$, 存在 $p \geq 0$ 使得: $y \in y(p)$.

Proof. 设 $y \in Y$ 是有效的, 考虑

$$P_y = \{y' \in \mathbb{R}^L : y' \gg y\}.$$

则 P_y 为凸集, 且 $P_y \cap Y = \emptyset$. 由凸集分离定理, 存在$0 \neq p \in \mathbb{R}^L$ 使得:

$$p \cdot y' \geq p \cdot y'', \quad \forall\, y' \in P_y,\, y'' \in Y.$$

特别地, $p \cdot y' \geq p \cdot y, \forall\, y' \gg y$. 故 $p \geq 0$.
对任何固定的 $y'' \in Y$, 有 $p \cdot y' \geq p \cdot y'', \forall\, y' \in P_y$.
由连续性, $p \cdot y \geq p \cdot y''$. 故 $y \in y(p)$. □

企业的目标

为什么我们假设企业的目标是利润最大化, 而不是销售收入或者企业规模的最大化?

实际上, 企业的生产目标由企业控制者所决定. 在我们所考虑的经济里, 企业为众多股东所拥有. 而股东同时也是消费者. 利润最大化是他们的共同利益吗?

假设企业的生产集为 Y, 企业有 I 个股东, 每个股东 i 的持股比例为 $\theta_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{I} \theta_i = 1$.

若企业的生产计划为 $y \in Y$, 则企业的利润为 $p \cdot y$, 每个股东 i 享有的利润为 $\theta_i p \cdot y$.

假设股东 i 的初始财富为 w_i, 效用函数为 u_i, 则股东 i 作为消费者, 其目标为:

$$\begin{cases} \max_{x_i \geq 0} & u_i(x_i) \\ \text{subject to} & p \cdot x_i \leq w_i + \theta_i p \cdot y. \end{cases}$$

显然, 对每个股东 i 而言, $p \cdot y$ 越大越好. 所以, 企业利润最大化是所有股东的共同利益.

不过, 上述讨论中隐含着下列假定:

(i) 价格接受 (price-taking) : 企业和消费者在做决策时, 都不考虑自己的行为对商品价格的影响.

(ii) 利润是确定的. 如果企业的利润是不确定的, 从而具有风险. 而不同的股东对于风险和不确定性具有不同的态度和预期. 这样, 股东们的利益未必一致.

(iii) 企业经理人完全由企业所有人控制. 通常, 企业的股东不能直接行使企业的经营权, 而是聘请职业经理人, 由职业经理人负责企业的经营. 显然, 职业经理人与企业所有人的目标不尽相同, 这样就需要对职业经理人进行监督. 如果股权比较分散, 则监督较为困难. 即使股权较为集中, 也难以观测职业经理人的行为. 比如, 难以判断经理人勤奋与否. 经理人可以将糟糕的业绩归咎于激烈的市场竞争, 而不是自己偷懒或决策失误所致. 这是信息经济学所考虑的问题之一. 此外, 还有大股东侵犯中小股东利益、大股东与经理人串谋、股东与债权人利益冲突、等等问题.

4. 均衡

基本假定

有 I 个消费者, J 个企业, 以及 L 种商品, 其中 $I \geq 1$, $L \geq 2$.

关于消费者 i, 其消费集为 $X_i \subseteq \mathbb{R}^L$, 其偏好为 $\succsim_i$.

关于企业 j, 其生产集为 $Y_j \subseteq \mathbb{R}^L$, Y_j 为非空闭集.

经济的**初始禀赋**为: $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_L) \in \mathbb{R}^L$.

这样的经济可记为:

$$\left(\{(X_i, \succsim_i)\}_{i=1}^I, \{Y_j\}_{j=1}^J, \bar{\omega}\right).$$

特别地, 若 $J = 0$, 则称之为**纯交换经济**.

Definition

所谓一个**配置** $(x, y) = (x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ 就是为每个消费者 i 指定一个消费向量 $x_i \in X_i$, 为每个企业 j 指定一个生产向量 $y_j \in Y_j$.

如果 $\sum_i x_i = \bar{\omega} + \sum_j y_j$, 即对所有商品 $l = 1, \ldots, L$, $\sum_i x_{li} = \bar{\omega}_l + \sum_j y_{lj}$, 则称配置 (x, y) 为**可行的**.

可行配置全体记为 A.

Definition
考虑两个可行配置: (x,y) 与 (x',y').

如果对所有 $i=1,\ldots,I$都有 $x_i' \succsim_i x_i$, 并且至少有一个 i 满足 $x_i' \succ_i x_i$, 则称 (x',y') Pareto 优于 (x,y), 亦称 (x',y') 为 (x,y) 的一个 Pareto 改进.

Pareto 改进的含意: 在所有 (其他) 人的处境都不变坏的条件下, 一部分人的处境得到严格改进.

Definition

考虑一个可行配置 (x, y). 如果它不能被 Pareto 改进, 则称其为 Pareto 最优的, 亦称为 Pareto 有效的.

Pareto 最优的含意: 在所有 (其他) 人的处境都不变坏的条件下, 不可能严格改进任何人的处境.

一个极端情形是: 在纯交换经济中, 把所有商品都分配给某一个消费者. 这种配置是 Pareto 最优的.

私有制经济

在私有制经济中, 每个消费者 i 具有初始禀赋 $\omega_i \in \mathbb{R}^L$, 对企业 j 的持股比例为 θ_{ij}, $\theta_{ij} \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{I} \theta_{ij} = 1$, $1 \le j \le J$.

这样的经济可记为:

$$\left(\{(X_i, \succsim_i)\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \{(\omega_i, \theta_{i1} \ldots, \theta_{iJ})\}_{i=1}^{I}\right).$$

Definition

给定上述私有制经济, 所谓一个 Walras 均衡 (亦称竞争均衡) 是由一个配置 (x^*, y^*) 和一个价格向量 $p = (p_1, \ldots, p_L)$ 所构成, 并且它们满足:

(i) **企业利润最大化**: 对所有 j, $y_j^* \in Y_j$ 且
$p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$, $\forall\, y_j \in Y_j$;

(ii) **消费者偏好最大化**: 对所有 i, $x_i^* \in X_i$,
$p \cdot x_i^* \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p \cdot y_j^*$ 且对所有 $x_i \in X_i$,

$$p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p \cdot y_j^* \Longrightarrow x_i^* \succsim x_i;$$

(iii) **市场出清** (或供需平衡) :
$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j^*$, 其中 $\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{I} \omega_i$.

Remark

(ii)+(iii) $\Longrightarrow p \cdot x_i^* = p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^*$,
$\forall\, i = 1, \ldots, I$.

特别地, 在以上条件下, 称 (x^*, y^*) 为 Walras 均衡配置, $p = (p_1, \ldots, p_L)$ 为 Walras 均衡价格.

在私有制经济中, 价格通过市场指导资源配置, 供需力量决定商品价格, 所有人追求自身利益的最大化. 这就是 Adam Smith 所描绘的 “自由市场经济”.

带转移的价格均衡 (Price Euqlibria with Transfers)

假设存在一个社会计划者, 他可以将社会的总财富按任意方式分配给消费者.

Definition

考虑一个经济 $(\{(X_i, \succsim_i)\}_{i=1}^I, \{Y_j\}_{j=1}^J, \bar{\omega})$.
一个带转移的价格均衡 (简称为 PET) 由一个配置 (x^*, y^*) 和一个价格向量 $p = (p_1, \ldots, p_L)$ 构成, 并且存在一个财富分配 $(w_1, \ldots, w_I)$,
$\sum_i w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$, 使得:

(i) 企业利润最大化: 对所有 j, $y_j^* \in Y_j$ 且 $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*, \forall\, y_j \in Y_j$;

(ii) 消费者偏好最大化: 对所有 i, $x_i^* \in X_i$, $p \cdot x_i^* \leq w_i$ 且对所有 $x_i \in X_i$,

$$p \cdot x_i \leq w_i \Longrightarrow x_i^* \succsim x_i;$$

(iii) $\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j^*$.

Remark

(ii)+(iii) $\Longrightarrow p \cdot x_i^* = w_i$.

在 PET 中, p 与 w_i 要选得恰到好处, 使得 (iii) 与 $\sum_i w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$ 成立.

Proposition

(x^*, y^*, p) 构成一个 PET 当且仅当下列所有条件成立:

(i) 企业利润最大化: 对所有 j, $y_j^* \in Y_j$ 且 $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*, \forall\, y_j \in Y_j$;

(ii) 消费者偏好最大化: 对所有 i, $x_i^* \in X_i$ 且对所有 $x_i \in X_i$,

$$p \cdot x_i \leq p \cdot x_i^* \Longrightarrow x_i^* \succsim x_i;$$

(iii) $\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j^*$.

Remark

Walras 均衡导致一个特殊的 PET, 其中社会计划者不作为.

若社会计划者对 Walras 均衡配置不满意, 而认为 (x^*, y^*) 才是合理的配置, 为了实现它, 社会计划者需要:

- 规定好一个价格 p, 使得: 在这个价格的指导下，每个企业的最优生产计划为 y_j^*. 为此需要了解每个企业的生产技术 Y_j.
- 分配社会总财富: $\sum_i x_i^* = \bar{\omega} + \sum_j y_j^*$, 使得: 每个消费者 i 的最优消费计划为 x_i^*. 为此社会计划者需要了解每个消费者的偏好.

总之, 要实现一个特定的 PET, 要求:

(1) 社会计划者全知全能 (了解每个企业的生产技术、每个消费者的偏好及社会总资源, 并且精于计算) ;

(2) 社会计划者是仁慈的、毫无私心、毫无偏心.

在 PET 中, 企业利润最大化的动机何在?

福利经济学第一基本定理

Theorem

若所有消费者的偏好都是局部非饱和的, 则对任意一个 PET (x^*, y^*, p)*, 其配置* (x^*, y^*) *都是 Pareto 最优的.*

特别地, 任何 Walras 均衡配置都是 Pareto 最优的.

Proof. 考虑一个 PET (x^*, y^*, p), 相应的财富分配为 $(w_1, \ldots, w_I)$, $\sum_{i=1}^{I} w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} p \cdot y_j^*$.

如果 $x_i \succ_i x_i^*$, 则 $p \cdot x_i > w_i$.

由于偏好是局部非饱和的, 于是对所有 i,
$x_i \succsim_i x_i^* \implies p \cdot x_i \geq w_i$.

如果 (x^*, y^*) 不是 Pareto 最优的，则存在可行配置 (x, y)，它 Pareto 优于 (x^*, y^*). 于是

$$\sum_i p \cdot x_i > \sum_i w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^* \geq p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j.$$

这与 (x, y) 是可行配置矛盾. $\square$

讨论

市场经济 vs 计划经济.

福利经济学第二基本定理

Definition

考虑一个经济 $(\{(X_i, \succsim_i)\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \bar{\omega})$. 一个带转移的价格拟均衡 (price quasi-equilibrium with transfers, 简称为 PQET) , 由一个配置 (x^*, y^*) 和一个价格向量 $p = (p_1, \ldots, p_L) \neq 0$ 构成, 并且存在一个财富分配 $(w_1, \ldots, w_I)$, $\sum_i w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$, 使得:

(i) 对所有 j, $y_j^* \in Y_j$ 且 $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$, $\forall\, y_j \in Y_j$;

(ii) 对所有 i, $x_i^* \in X_i$, $p \cdot x_i^* \leq w_i$ 且对所有 $x_i \in X_i$,

$$\underline{x_i \succ_i x_i^* \Longrightarrow p \cdot x_i \geq w_i};$$

(iii) $\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j^*$.

显然, 所有 PET 都是 PQET.

Theorem

考虑一个经济 $(\{(X_i, \succsim_i)\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \bar{\omega})$*. 假设每个* Y_j *凸、每个* X_i *凸、每个* $\succsim_i$ *凸且局部非饱和. 则对任何 Pareto 最优的配置* (x^*, y^*)*, 存在价格向量* $p \neq 0$*, 使得* (x^*, y^*, p) *是一个 PQET.*

Proof. 令 $V_i = \{x_i \in X_i : x_i \succ_i x_i^*\}$, $V = \sum_i V_i$, $Y = \sum_j Y_j$.

考虑一个 Pareto 最优的配置 (x^*, y^*), 显然 $V \cap (Y + \bar{\omega}) = \emptyset$.

易见每个 V_i 为凸集, 从而 V 为凸集.

此外, $Y + \bar{\omega}$ 也为凸集.

由凸集分离定理, 存在 $p \neq 0$ 以及 $r \in \mathbb{R}$, 使得

$$p \cdot z \geq r \geq p \cdot z', \quad \forall z \in V, z' \in Y + \bar{\omega}.$$

以下验证 (x^*, y^*, p) 是一个 PQET.

Corollary

假设对所有 i, X_i *为凸集*, $0 \in X_i$, $\succsim_i$ *连续. 如果在一个 PQET 中* $(w_1, \ldots, w_I) \gg 0$, *则它是一个 PET.*

第二福利定理仅为理论上的一个结果, 在应用中颇受限制.

- 为了实施一个特定的 Pareto 最优配置, 必须保证支撑价格 p 不受消费者和企业的行为的影响. 若经济结构不能保证 "价格接受 (price-taking)", 则社会计划者必须强制实行该价格.
- 采用第二福利定理来配置资源的社会计划者必须拥有足够精确的信息以确保待实施的配置是 Pareto 最优的和计算出正确的价格向量. 为此, 社会计划者必须了解每个消费者的偏好与禀赋、每个企业的生产技术. 这几乎是不可能的.

即便通过市场机制来配置资源, 也有诸多限制:

- 没有欺诈 (信息公开透明、信息对称)
- 没有垄断
- 没有掠夺 (产权得到有效保护)
- 等等

Pareto 最优与社会福利最优

效用可能集为

$$\mathcal{U} = \left\{ (u_1, \ldots, u_I) \in \mathbb{R}^I \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{存在可行配置 } (x, y) \text{ 使得} \\ u_i \le u_i(x_i), 1 \le i \le I \end{array} \right\}.$$

$\mathcal{U}$ 的 Pareto 前沿为:

$$\mathcal{UP} = \{u \in \mathcal{U} : \text{不存在 } u' \in \mathcal{U} \text{ 使得 } u' > u\}.$$

可行配置 (x, y) 为 Pareto 最优的 $\Longleftrightarrow$ $(u_1(x_1), \ldots, u_I(x_I)) \in \mathcal{UP}$.

若对所有 i, j, X_i, Y_j 为凸集, $u_i(\cdot)$ 为凹函数, 则 $\mathcal{U}$ 为凸集.

假设社会总体福利水平可被一个社会福利函数 $W(u_1, \ldots, u_I)$ 所刻画.

这里我们仅考虑线性的社会福利函数 $(\lambda \geq 0)$:

$$W(u_1, \ldots, u_I) = \sum_i \lambda_i u_i = \lambda \cdot u,$$

给定该社会福利函数, 则我们的目标为:

$$\max_{u \in \mathcal{U}} \lambda \cdot u. \tag{1}$$

Proposition

若 $u^* = (u_1^*, \dots, u_I^*)$ 是对某个 $\lambda \gg 0$ 时 (1) 的解, 则 $u^* \in \mathcal{UP}$.

反之, 若 $\mathcal{U}$ 为凸集, 则对任何 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_I) \in \mathcal{UP}$, 存在 $\lambda > 0$, 使得: $\lambda \cdot \tilde{u} \geq \lambda \cdot u, \forall\, u \in \mathcal{U}$.

Proof. 第一部分显然. 考虑第二部分.

设 $\mathcal{U}$ 为凸集且 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_I) \in \mathcal{UP}$.

令 $\mathcal{P}_{\tilde{u}} = \{u \in \mathbb{R}^I : u \gg \tilde{u}\}$. 则 $\mathcal{P}_{\tilde{u}}$ 为凸集, $\mathcal{U} \cap \mathcal{P}_{\tilde{u}} = \emptyset$.

由凸集分离定理, 存在 $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}^I$, 使得

$$\lambda \cdot u \leq \lambda \cdot u', \ \forall\, u \in \mathcal{U}, u' \in \mathcal{P}_{\tilde{u}}.$$

于是, $\lambda \cdot u \leq \lambda \cdot \tilde{u}, \forall\, u \in \mathcal{U}$. 由于 $\mathcal{U} - \mathbb{R}^I_+ \subseteq \mathcal{U}$, 可见 $\lambda \geq 0$. $\square$

Remark

若$\mathcal{U}$ 非凸, 则第二部分不成立.

向量 λ 称为福利权重向量. 若第二部分成立, 则称 Pareto 最优被福利权重向量 λ 所支撑.

设 (x^*, y^*) 为 Pareto 最优配置, 且被 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_I) \gg 0$ 所支撑, 则

$$\max_{u \in \mathcal{U}} \lambda \cdot u$$
$$= \begin{cases} \max_{\{x_i\}} \sum_i \lambda_i u_i(x_i) \\ \text{subject to } x_i \in X_i, 1 \leq i \leq I, \sum_i x_i \in \bar{\omega} + Y. \end{cases}$$

这可以分两步达到:

(i) 对任意固定的 $\bar{x}$ 进行分配.

$$u_\lambda(\bar{x}) = \begin{cases} \max_{\{x_i\}} \sum_i \lambda_i u_i(x_i) \\ \text{subject to } x_i \in X_i, 1 \le i \le I, \sum_i x_i = \bar{x}. \end{cases}$$

(ii) 寻找最好的 $\bar{x}$.

$$\begin{cases} \max_{\bar{x}} u_\lambda(\bar{x}) \\ \text{subject to } \bar{x} \in X \cap (\bar{\omega} + Y), \end{cases}$$

其中 $X = \sum_i X_i$.

u_λ: 代表性消费者

X: 总消费集

Y: 总生产集

第二步即为代表性消费者的最优消费问题.

存在性

我们将用到如下假定：

Assumption

对每个消费者 i, $X_i = \mathbb{R}^L_+$, $\succsim_i$ 连续、严格凸、强单调, 且 $\sum_i \omega_i \gg 0$.

对纯交换经济, 配置 x^* 与价格向量 p 构成一个 Walras 均衡当且仅当

(i) $x_i^* = x_i(p, p \cdot \omega_i)$, $\forall\, i$, 其中 $x_i(\cdot, \cdot)$ 为消费者 i 的 Walras 需求函数;

(ii) $\sum_i x_i^* - \sum_i \omega_i = 0$.

价格向量 p 为 Walras 均衡价格向量当且仅当

$$\sum_i (x_i(p, p \cdot \omega_i) - \omega_i) = 0.$$

由于 $\succsim_i$ 强单调，Walras 均衡价格 $p \gg 0$.

一般地, 需要用到如下定理:

Theorem (Kakutani 不动点定理)

设 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^L$ 为一凸紧集, $F : \Delta \to \Delta$ 是一个上半连续的对应, 且每个 $F(p)$ 为非空凸集. 则 F 有不动点 $p \in \Delta$, 即: 存在 $p \in \Delta$ 使得 $p \in F(p)$.

一般地, 我们有如下结论:

Theorem

对于一个纯交换经济, 在假定 0.1 下, Walras 均衡存在.

5. 不确定性的经济

不确定性

假设可能的状态共有 S 个. 每个可能的状态可用 s 表示, $s = 1, \ldots, S$.

任何物质商品 l 的消费与生产都可能与状态 s 有关, 因此需要将二者结合在一起考虑.

或有商品 (contingent commodity) , 亦称状态依存商品.

或有商品的数量与价格都可能与状态有关.

区分两个阶段:

- 不确定性解决之前 (prior to the resolution of uncertainty) , 即所谓 “事前 (ex ante)”
- 不确定性解决之后 (after the resolution of uncertainty) , 即所谓 “事后 (ex post)”.

事前, 我们还不知道世界所处的确切状态;
事后, 我们知道了世界所处的确切状态.

Example

考虑物质商品 "伞" 与状态 "晴天" 或 "雨天" 的结合.

两种或有商品: 晴天-伞与雨天-伞, 二者各有其交易价格与数量, 且不必相同.

消费者出价 10 元 (单价) 购买 3 把雨天-伞意味着:

消费者事前付给卖伞者共 30 元钱;
事后, 如果下雨则从对方那里得到 3 把伞, 如果晴天则得不到伞. □

Definition

对每种物质商品 l 和状态 s, 一件或有商品 ls 就是: 当且仅当状态 s 发生时, 得到一件物质商品 l.

相应地, 一个或有商品向量为

$$x = (x_{11}, \ldots, x_{L1}, \ldots, x_{1S}, \ldots, x_{LS}) \in \mathbb{R}^{LS},$$

它表示: 当状态 s 发生时, 得到物质商品向量 $(x_{1s}, \ldots, x_{Ls}) \in \mathbb{R}^{L}$.

一个或有商品向量可视为一个 L 维随机向量, 其中第 l 个随机变量为 $(x_{l1}, \ldots, x_{lS})$.

每个消费者 i 的禀赋可能依赖于状态, 可表示为一个或有商品向量:

$$\omega_i = (\omega_{11i}, \ldots, \omega_{L1i}, \ldots, \omega_{1Si}, \ldots, \omega_{LSi}) \in \mathbb{R}^{LS}.$$

它表示: 当状态 s 发生时, 消费者 i 得到禀赋向量 $(\omega_{1si}, \ldots, \omega_{Lsi}) \in \mathbb{R}^L$.

每个消费者 i 的消费集 $X_i \subseteq \mathbb{R}^{LS}$, 其偏好 $\succsim_i$ 定义在 X_i 上.

例：状态依存期望效用

对任何 $x_i, x_i' \in X_i$,

$x_i \succsim_i x_i'$

$\Longleftrightarrow$

$$\sum_s \pi_{si} u_{si}(x_{1si}, \ldots, x_{Lsi}) \geq \sum_s \pi_{si} u_{si}(x'_{1si}, \ldots, x'_{Lsi}).$$

$\succsim_i$ 是 “事前” 偏好, 在不确定性解决之前就要对或有商品向量 $(x_{11i}, \ldots, x_{L1i}, \ldots, x_{1Si}, \ldots, x_{LSi})$ 进行评价.

u_{si} 可以代表 “事后” 偏好, 据此对状态 s 下的物质商品向量 $(x_{1si}, \ldots, x_{Lsi})$ 进行评价.

“事后” 效用函数 u_{si} 可以依赖于状态 s.

例如, 消费者对酒的享受可能就有赖于其健康状况.

企业 j 的生产集 $Y_j \subset \mathbb{R}^{LS}$.

一个或有生产计划 $y_j \in Y_j$ 表示: 当状态 s 发生时, 物质商品的生产计划 $(y_{1sj}, \ldots, y_{Lsj}) \in \mathbb{R}^L$ 对于企业 j 来说是技术上可行的.

例如, (种子,农作物) 就依赖于气侯状况.

消费者 i 对企业 j 的持股比例为 θ_{ij}; 它不依赖于状态. 对所有 i: $\theta_{ij} \geq 0$ 且 $\sum_j \theta_{ij} = 1$.

Arrow-Debreu 均衡

假设市场在事前对每个或有商品 ls 开放,
或有商品 ls 的价格记为 p_{ls}.

形式上, 上述经济是以前所讨论过的经济的一种特殊情形, 以前所有的概念和理论都适用之.

当讨论或有商品时, 通常称这种情况下的 Walras 均衡为 Arrow-Debreu 均衡.

Definition
一个配置

$$(x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, \ldots, y_J^*) \in X_1 \times \cdots \times X_I \times Y_1 \times \cdots \times Y_J \in \mathbb{R}^{LS(I+J)}$$

和一个或有商品价格向量

$$p = (p_{11}, \ldots, p_{LS}) \in \mathbb{R}^{LS}$$

构成一个 Arrow-Debreu 均衡, 如果

(i) 对每个 j, $p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j$ 对所有的 $y_j \in Y_j$ 成立;

(ii) 对每个 i,

$$x_i \in X_i, p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p \cdot y_j^* \Longrightarrow x_i^* \succsim_i x_i;$$

(iii) $\sum_i x_i^* = \sum_j y_j^* + \sum_i \omega_i$.

福利性质、存在性、局部唯一性等, 均适用于 Arrow-Debreu 均衡.

特别地, Arrow-Debreu 均衡的 Pareto 最优性表明: 所有或有商品的可交易性导致风险的有效配置.

对一个企业 j 而言, 任何一个生产计划 y_j 的利润 $p \cdot y_j$ 是非随机的. 尽管物质商品的生产和交割都依赖于状态, 但由于市场对每一种或有商品 ls 开放, 企业可以通过这些市场在事前就出售其产品, 从而为企业提供了一种保险. 此时, 企业的目标仍然是利润最大化.